Георгій Вороний

(1868 – 1908)

George Voronoi

* * *

Математична спадщина

Прожив лише 40 років.

Написав лише 12 статей.

Виховав лише 2 учнів.

Дисертації:

1. ***О числах Бернулли*** // Сообщения Харьковского математического общества, 1890. (бакалаврат)
2. ***О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения 3-й степени*** // С-Пб.: Тип. Имп. Академии Наук, 1894. (магістерка)
3. ***Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей***, Варшава, 1896. (докторат)

О числахъ Бернулли.

Г. Ѳ. Вороного.

Замѣтка эта, почти исключительно, посвящена изслѣдованію нѣкоторыхъ свойствъ чиселъ Бернулли, на которыя въ первый разъ указалъ проф. I. C. Adams въ Journal für die reine und angewandte Mathematik, B. 85, въ статьѣ: „Table of the values of the firs sixty two numbers of Bernoulli“. Онъ говоритъ:

„Я доказалъ, что, если n простое число большее 3, то числитель n-го „Бернулліева числа будетъ дѣлиться на n.

„Я также замѣтилъ, что если p такой простой дѣлитель n, который „не входитъ множителемъ въ знаменатель n-го числа Бернулли, то „числитель этого числа дѣлится на p“ *).

Я доказываю относительно чиселъ Бернулли слѣдующую теорему:

Если m-е Бернулліево число $B_m = \frac{P_m}{\Theta_m}$, гдѣ $\frac{P_m}{\Theta_m}$ дробь не сократимая, то:

$$(-1)^{m-1}(a^{2m}-1)P_m \equiv 2ma^{2m-1}\Theta_m\left[1^{2m-1}E\frac{a}{N}+2^{2m-1}E\frac{2a}{N}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(N-1)^{2m-1}E\frac{(N-1)a}{N}\right], \text{(mod. } N\text{)}.$$

*) По поводу послѣдняго замѣчанія, онъ прибавляетъ: „I have not succeeded however, in obtaining a general proof of this proposition, though, I have no doubt of its truth“. Въ этой же статьѣ профессоръ Adams обѣщаетъ напечатать замѣтку о числахъ Бернулли въ appendix при 22-мъ томѣ Cambridge Observations. Ни въ Пулковской обсерваторіи, ни въ Академіи Наукъ этотъ томъ Cambridge Observations не былъ полученъ.

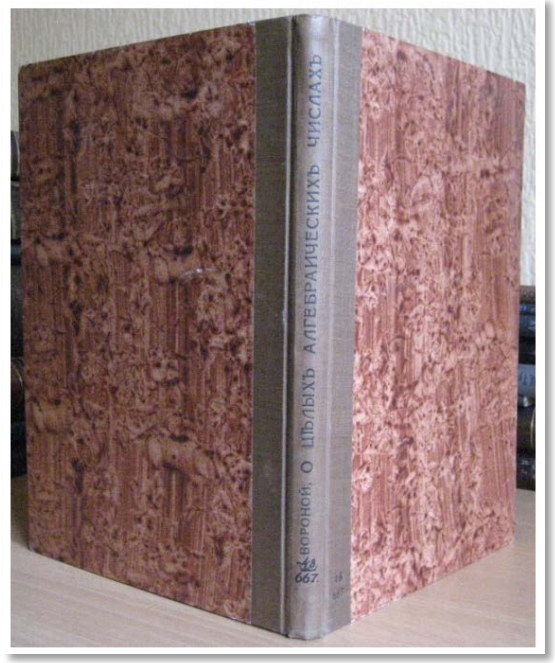
Студентська робота:

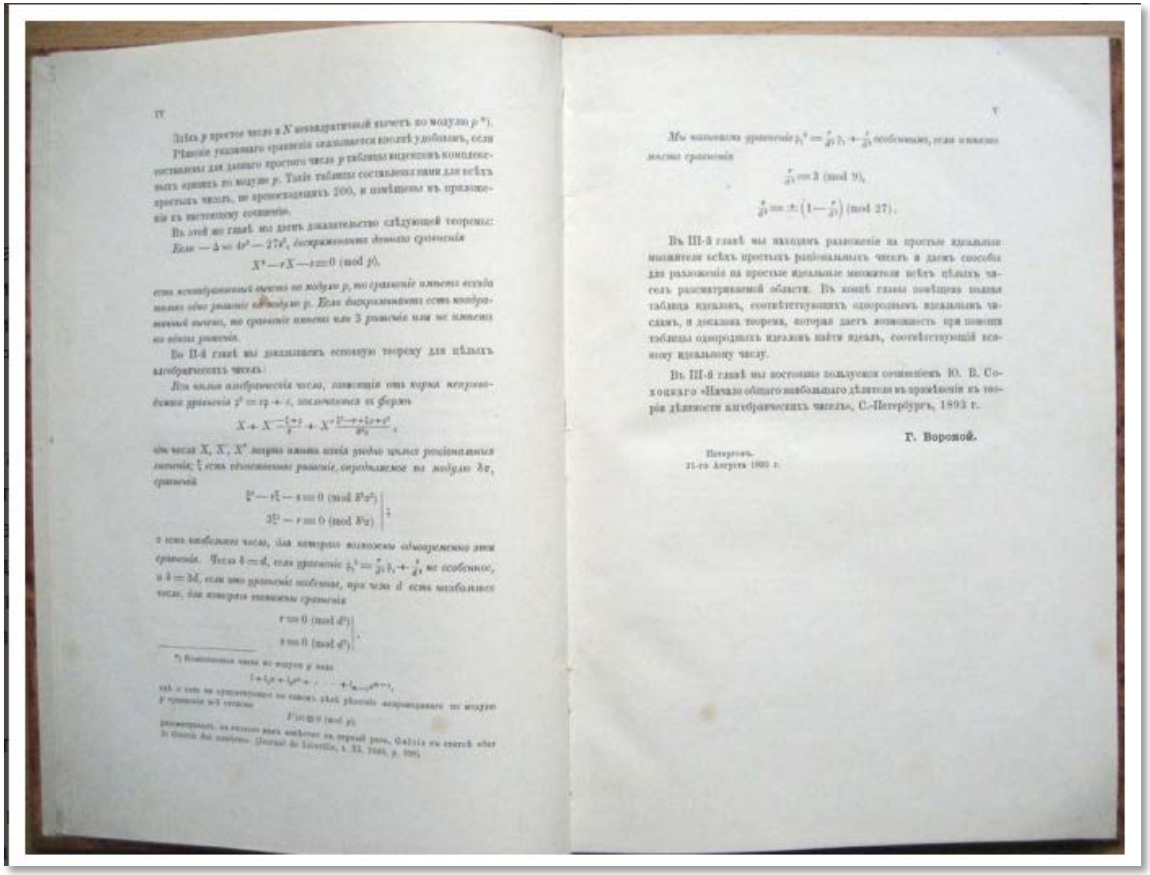
“О числах Бернулли”,

опублікована в журналі “Сообщения Харьковского математического общества” (1890).

Магістерська праця:

О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения 3-й степени // Санкт-Петербург: Тип. Имп. Академии Наук, 1894.

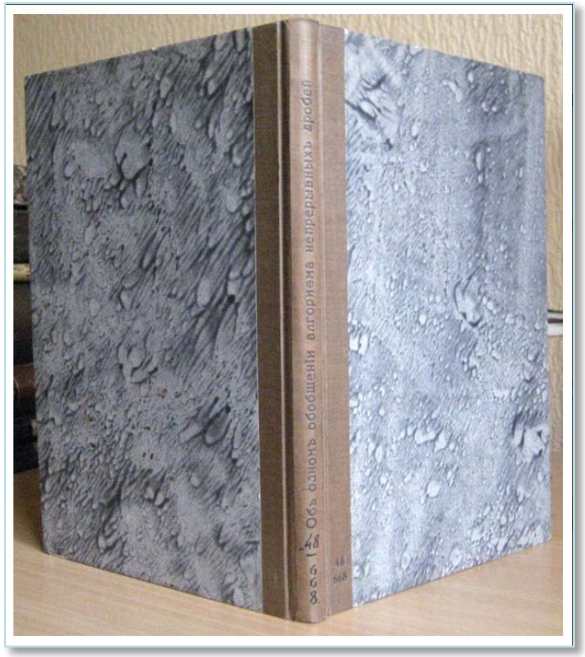


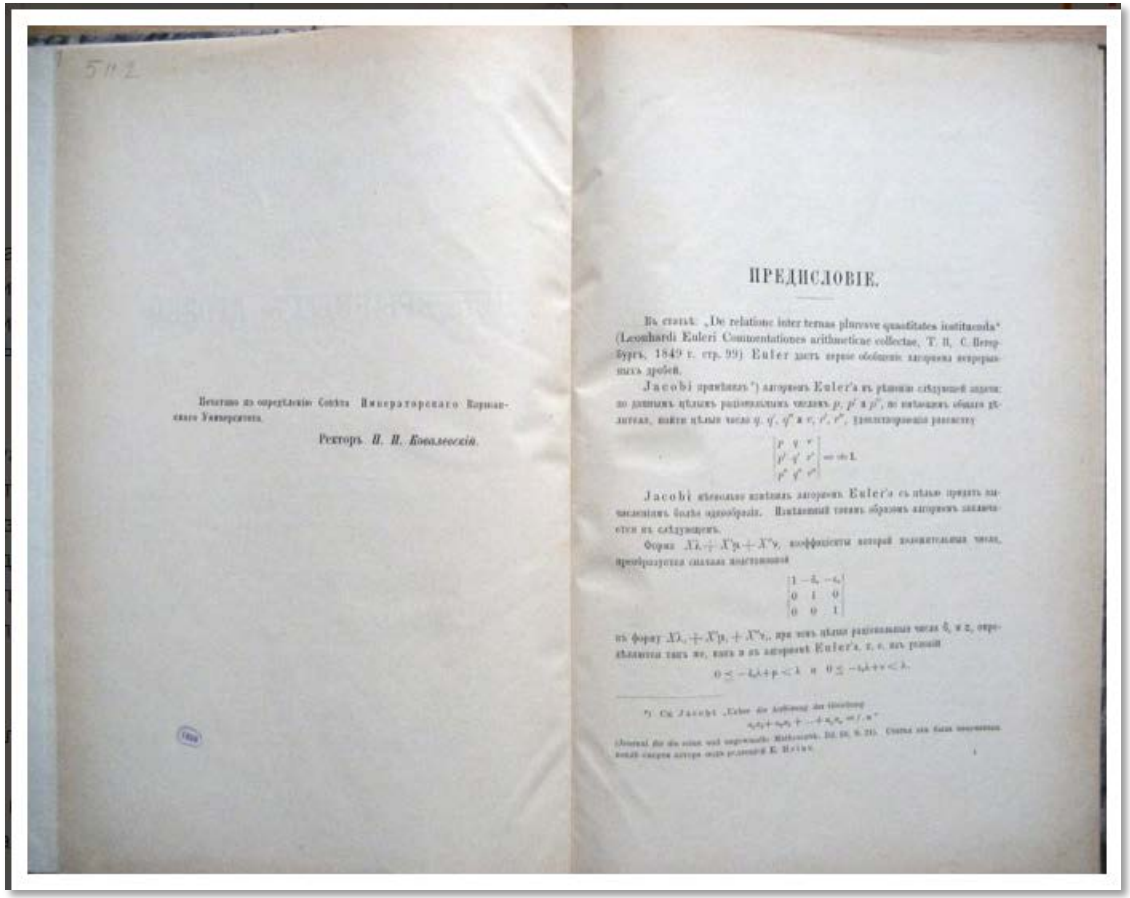


Докторська дисертація:

Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей //

Варшава, 1896.





Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Варшавскаго Университета.

Ректоръ *П. В. Ковалевскій.*

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Магістерську і докторську праці захищав у Санкт-Петербурзі. Обидві дисертації були відзначені премією Буняковського.

В обидвох дисертаціях Вороний розробляє ефективні алгоритми знаходження генераторів гратки

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\varepsilon + \mathbb{Z}\varepsilon^2$$

цілих алгебраїчних чисел у розширенні поля раціональних чисел коренем ε кубічного рівняння

$$X^3 + aX + b = 0$$

з цілими коефіцієнтами.

Наприклад, для розширення поля раціональних чисел коренем $\varepsilon = \sqrt[3]{23}$ генераторами гратки $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\varepsilon + \mathbb{Z}\varepsilon^2$ є алгебраїчні числа

$$2166673601 + 761875860\,\varepsilon + 267901370\,\varepsilon^2$$

та

$$-41399 - 3160\,\varepsilon + 6230\,\varepsilon^2,$$

які Г. Вороний на вимогу А. Маркова знайшов десь за 3 години із застосуванням свого алгоритму.

* * *

Інтерес спеціалістів з теорії чисел у XIX ст. саме до кубічних розширень пояснюється тим, що обидві класичні задачі давньогрецької математики (трисекція кута та подвоєння куба) зводяться до розв'язування кубічних рівнянь з цілими коефіцієнтами.

Покращенню і узагальненню алгоритму Вороного все ще присвячують сучасні статті у теорії чисел.

JOURNAL OF NUMBER THEORY **20**, 177–191 (1985)

A Generalization of Voronoi's Unit Algorithm I*

JOHANNES BUCHMANN

Mathematisches Institut der Universität,
Weyertal 86-90, D-5000 Köln 41, West Germany

Communicated by H. Zassenhaus

Received April 30, 1983

By means of a new method of mapping an algebraic number field into a euclidean space Voronoi's unit algorithm is generalized to all algebraic number fields and it is proved that the generalized Voronoi algorithm computes the fundamental units of all algebraic number fields of unit rank 1, i.e., of the real quadratic fields, of the complex cubic fields, and of the totally complex quartic fields. © 1985 Academic Press, Inc.

Вороний публікував мало, але якісно.
Ось його 4 основні роботи, три з яких опубліковані в елітарному Journal für die reine und angewandte Mathematik (журналі Крелля):

1. ***Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques*** // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1903. 126(4): 241–282.

2. ***Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries*** // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 1904. Série 3. 21: 203–267; 459–533.

3. ***Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premier Mémoire. Sur quelques propriétés des formes quadratiques positive parfaites*** // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1907. 133(2): 97–156; 1908. 133(3): 157–178.

4. ***Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire. Recherches sur les parallélоèdres primitifs*** // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1908. 134(3): 198–246; 1908. 134(4): 247–287; 1909. 136(2): 67–178.

Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques.

(Par M. *Georges Voronoï* à Varsovie).

Introduction.

Je m'occupe dans ce mémoire des méthodes qui servent à déterminer la valeur asymptotique de la fonction numérique $F(x)$ représentée par la somme

$$F(x) = \sum_{(s)} f(m, n), \tag{1.}$$

la fonction arbitraire $f(m, n)$ des variables entières m et n étant bien déterminée dans l'ensemble (S) défini par les inégalités

$$(S) \ldots m > 0,\ n > 0 \text{ et } mn \leqq x \text{ où } x \geqq 1.$$

Le cas le plus simple où

$$f(m, n) = 1$$

a été l'objet de plusieurs recherches.*) Dans ce cas, la fonction $F(x)$ représentée par la somme (1.) peut être mise sous la forme

$$F(x) = \sum_{n>0}^{n \leqq x} E\frac{x}{n},$$

si l'on désigne par le symbole Ex le nombre entier satisfaisant aux conditions

$$x - 1 < Ex \leqq x.$$

Lejeune-Dirichlet a démontré**) que la fonction numérique $\sum_{n>0}^{n \leqq x} E\frac{x}{n}$ a une valeur asymptotique remarquable:

$$x(\log x + 2C - 1),$$

C étant la constante d'*Euler;* de plus, si l'on pose

$$\sum_{n>0}^{n \leqq x} E\frac{x}{n} = x(\log x + 2C - 1) + R(x),$$

*) Voyez: Zahlentheorie von *Paul Bachmann* (Zweiter Theil: Die analytische Zahlentheorie, Abschnitt 13. Leipzig, 1894).

**) *Lejeune-Dirichlet*: „Ueber die Bestimmung asymptotischer Gesetze in der Zahlentheorie“ et „Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie“ (*Lejeune-Dirichlets* Werke, t. I, p. 351 et t. II, p. 49).

SUR UNE FONCTION TRANSCENDANTE

ET SES APPLICATIONS

A LA SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES.

Par M. Georges VORONOÏ.

INTRODUCTION.

La formule sommatoire d'Euler-Maclaurin et la formule de Fourier, pour le développement de la fonction $f(x)$ en série trigonométrique, ont leur origine commune dans le théorème suivant (1):

Théorème. — *La somme* $\frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n \leqq b} f(n) + \frac{1}{2}\sum_{n \geqq a}^{n<b} f(n)$ *peut être développée en série infinie*

$$(I) \quad \frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n \leqq b} f(n) + \frac{1}{2}\sum_{n \geqq a}^{n<b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} 2\int_a^b f(x)\cos 2\pi n x\,dx$$

à condition que la fonction $f(x)$ *soit continue dans l'intervalle* $a < x < b$ *et ne possède dans cet intervalle qu'un nombre limité de maxima et de minima,* a *et* b *étant deux nombres réels quelconques.*

En faisant dans la formule (I)

$$f(n) = f(x + 1 - n), \qquad a = x, \qquad b = x + 1$$

(1) *Voyez*, par exemple, *Vorlesungen über Zahlentheorie von Lejeune-Dirichlet*, herausgegeben von Dedekind (Vierte Auflage, Braunschweig, 1894, supplément I, p. 288) et aussi le Mémoire de M. Franel: *Sur la formule sommatoire d'Euler* (*Mathematische Annalen*, Bd. XLVII, p. 433).

Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques.

Premier Mémoire.

Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites.

Par M. *Georges Voronoï* à Varsovie.

Introduction.

Hermite avait introduit dans la théorie des nombres un principe nouveau et fécond, à savoir: étant donné un ensemble (X) des systèmes $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ des valeurs entières de $x_1, x_2, \ldots x_n$, on fait correspondre à l'ensemble (X) un ensemble (R) composé des domaines déterminés à l'aide des paramètres continus $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$ de manière qu' en étudiant l'ensemble (R) on étudie en même temps l'ensemble (X).

Hermite a montré*) de nombreuses applications du nouveau principe pour la généralisation des fractions continues, pour la recherche des unités algébriques etc.

Les idées d'*Hermite* ont été développées dans les travaux de M. M. *Zolotareff, Charve, Selling, Minkowski.***)

*) *Hermite.* Extraits de lettres de M. *Ch. Hermite* à M. *Jacobi* sur différents objets de la théorie des nombres. (Ce Journal t. 40, p. 261.)

Hermite. Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. (Ce Journal t. 41, p. 191.)

Hermite. Sur la théorie des formes quadratiques. (Ce Journal t. 47, p. 313.)

**) *Zolotareff.* Sur une équation indéterminée du troisième degré. (Pétersbourg, 1869, *en russe.*)

Zolotareff. Théorie des nombres entiers complexes avec des applications au calcul intégral. (Pétersbourg, 1874, *en russe.*)

Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques.

Deuxième Mémoire.

Recherches sur les parallélloèdres primitifs.

Par M. *Georges Voronoï* à Varsovie.

Introduction.

Les méthodes connues de réduction des formes quadratiques positives binaires, ternaires et quaternaires*) reposent sur une propriété des formes quadratiques positives, à savoir:

Chaque forme quadratique positive $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ *à* n *variables possède dans l'ensemble* E *composé de tous les systèmes* $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *de valeurs entières des variables* $x_1, x_2, \ldots x_n$ n *minima consécutifs*

$$M_1 \leqq M_2 \leqq \cdots \leqq M_n$$

déterminés à condition que le déterminant ω *d'un système*

$$(1.) \qquad (l_{11}, l_{21}, \ldots l_{n1}),\ (l_{12}, l_{22}, \ldots l_{n2}),\ \ldots\ (l_{1n}, l_{2n}, \ldots l_{nn})$$

de représentations de ces minima dans l'ensemble E *ne s'annule pas.*

*) *Lagrange*, Recherches d'Arithmétique. (Oeuvres, t. III, p. 695.)

Gauß, Disquisitiones arithmeticae. (Oeuvres, t. I, art. 171, p. 146).

Lejeune-Dirichlet, Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. (Oeuvres, t. II, p. 41.)

Minkowski, Sur la réduction des formes quadratiques positives quaternaires. (Comptes Rendus des séances de l'Académie de Paris, t. 96, p. 1205.)

Про журнал Крелля:

The journal was founded by August Leopold Crelle (Berlin) in 1826 and edited by him until his death in 1855. It was one of the first major mathematical journals that was not a proceedings of an academy. It has published many notable papers, including works of Niels Henrik Abel, Georg Cantor, Gotthold Eisenstein, Carl Friedrich Gauss and Otto Hesse.

Редактори:

- 1826–1856 August Leopold Crelle
- 1856–1880 Carl Wilhelm Borchardt
- 1881–1888 Leopold Kronecker, Karl Weierstrass
- 1889–1892 Leopold Kronecker
- 1892–1902 Lazarus Fuchs
- 1903–1928 Kurt Hensel
- 1929–1933 Kurt Hensel, Helmut Hasse, Ludwig Schlesinger
- 1934–1936 Kurt Hensel, Helmut Hasse
- 1937–1952 Helmut Hasse
- 1952–1977 Helmut Hasse, Hans Rohrbach
- 1977–1980 Helmut Hasse
- 1980– Rainer Weissauer

Детальніше про зміст 3-х праць Вороного в журналі Крелля.

1. *Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques* // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1903. 126(4): 241–282.

У цій статті Вороний покращує асимптотичну формулу Діріхле (1849) для суми

$$S(n) = d(1) + \ldots + d(n),$$

де $d(k)$ – кількість дільників k.

Легко бачити, що $S(n)$ дорівнює кількості цілочисельних точок під графіком гіперболи $xy \le n$.

У 1849 році Діріхле довів асимптотичну оцінку

$$S(n) = (n \ln n + 2C - 1) + O(\sqrt{n}),$$

де

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(-\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \approx 0.57721\ldots$$

– стала Ейлера.

Понад 50 років багато відомих математиків безуспішно старалися покращити асимптотичну формулу Діріхле і врешті це вдалося Вороному, який у 1903 довів оцінку

$$S(n) = (n \ln n + 2C - 1) + O(\sqrt[3]{n} \ln n),$$

(сучасні дослідження дозволяють замінити $O(\sqrt[3]{n} \ln n)$ на

$$O\left(n^{\frac{131}{416}} (\ln n)^{\frac{26947}{8320}} \right)$$

* * *

До речі, методом Вороного скористався його учень Серпінський, який у 1904 році довів, що у крузі $x^2 + y^2 \le n$ є $\pi n + O(\sqrt[3]{n})$ цілих точок. Сучасні дослідження дозволяють замінити $O(\sqrt[3]{n})$ на

$$O\left(n^{\frac{131}{416}} (\ln n)^{\frac{18637}{16640}} \right).$$

Особливо важливими для математики є 2 останні мемуари Вороного:

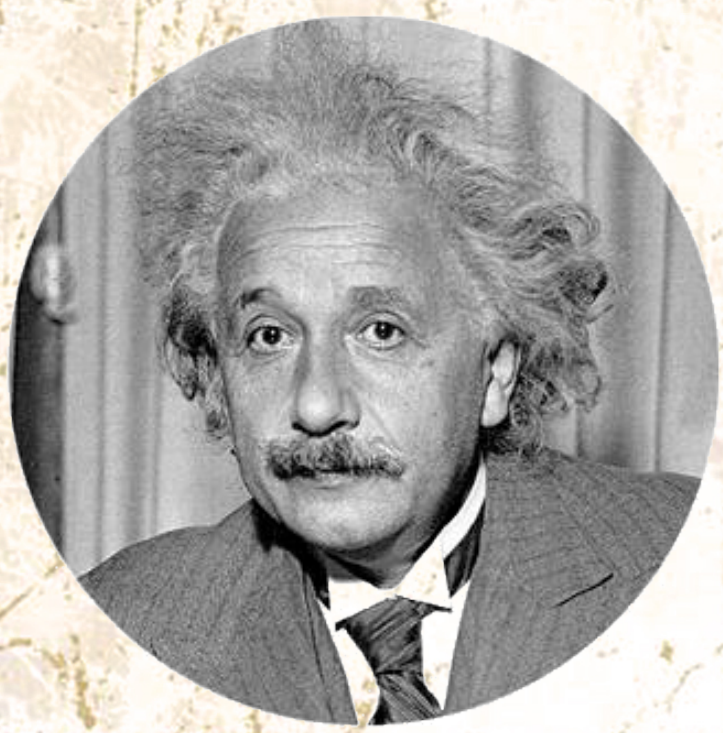
Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premier Mémoire. Sur quelques propriétés des formes quadratiques positive parfaites // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1907. 133(2): 97–156; 1908. 133(3): 157–178.

Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire. Recherches sur les parallélоèdres primitifs // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1908. 134(3): 198–246; 1908. 134(4): 247–287; 1909. 136(2): 67–178.

Завдяки цим двом працям Георгія Вороного вважають фундатором геометричної теорії чисел поряд з німецьким математиком Германом Мінковським (з яким Вороний познайомився на III Світовому математичному конгресі в Гейдельберзі у 1904 році).

До речі, Мінковського вважають також «математичним батьком» теорії відносності Айнштайна.

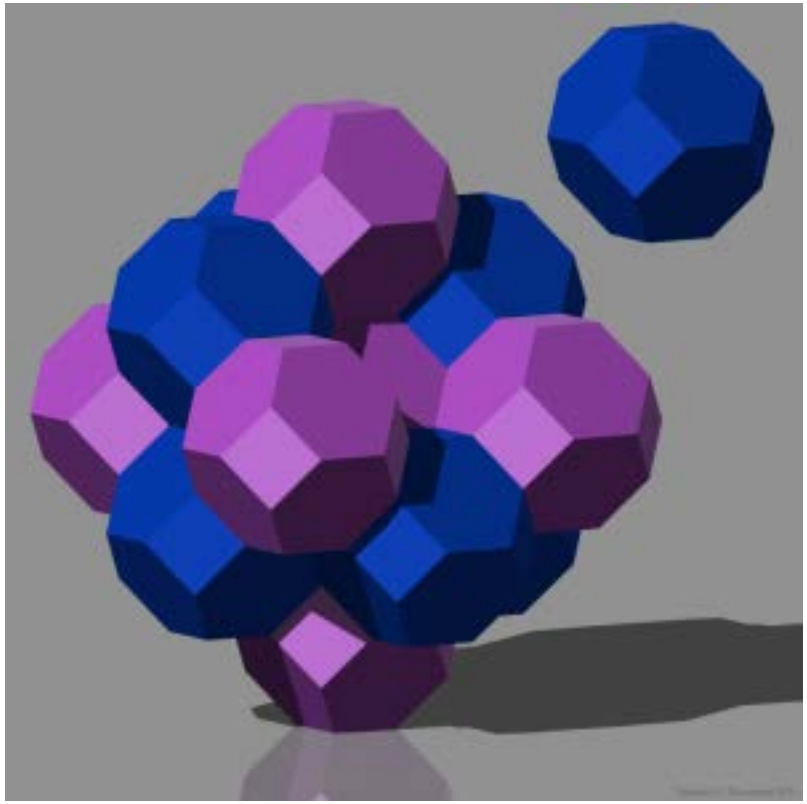
H. Minkowski



У своїх роботах з геометричної теорії чисел Вороний вивчає замощення простору зсувами поліедра, який є, як тепер кажуть, кліткою Вороного дискретної гратки.

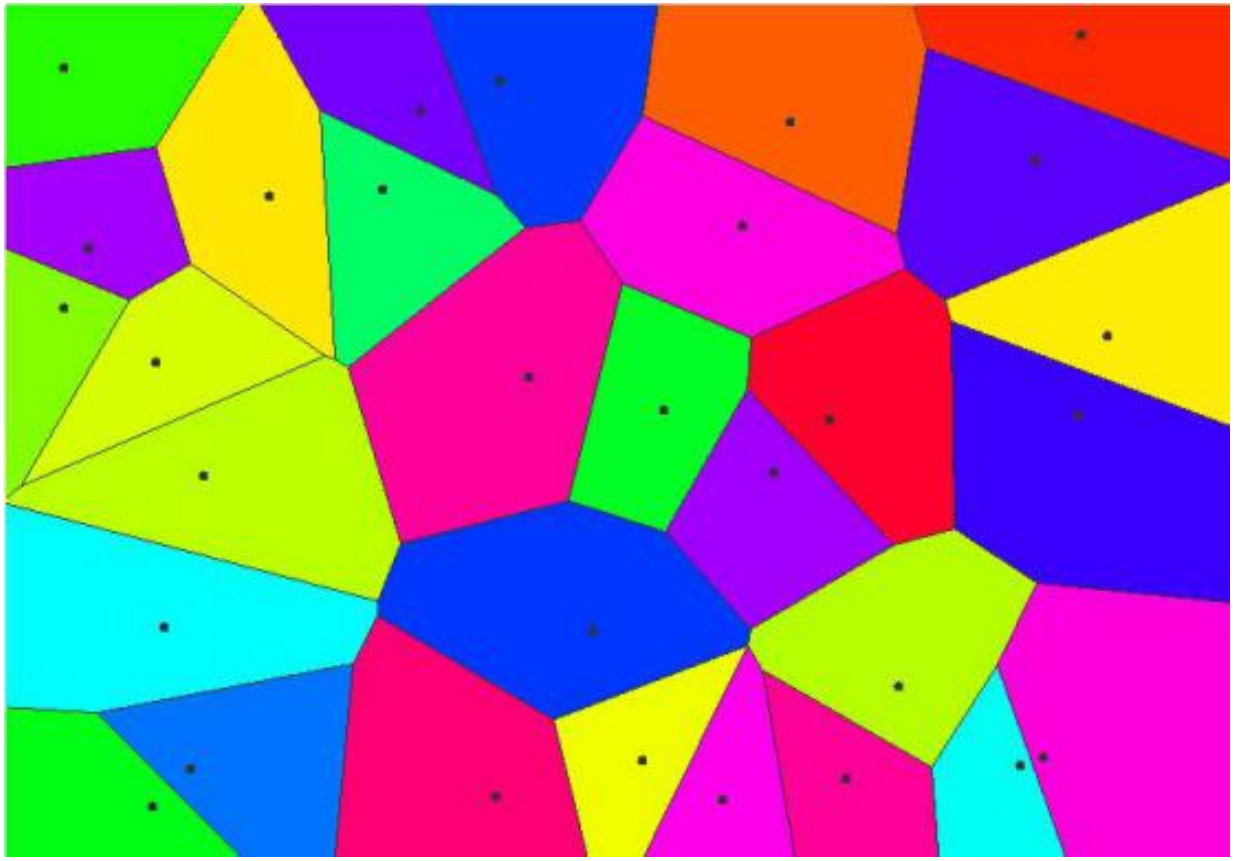
Для примітивних граток (а такими є гратки у загальному положенні) він класифікує усі можливі комбінаторні типи кліток Вороного.

Зокрема, у вимірі 2 він доводить, що примітивні поліедри є шестикутниками, у вимірі 3 – 14-гранниками, а у вимірі 4 – 30-гранниками, причому трьох комбінаторно нееквівалентних типів.



У сучасній науці (і не тільки математиці) прізвище Вороного пов’язують передусім з такими поняттями як:

діаграми Вороного, клітки Вороного, розбиття Вороного.



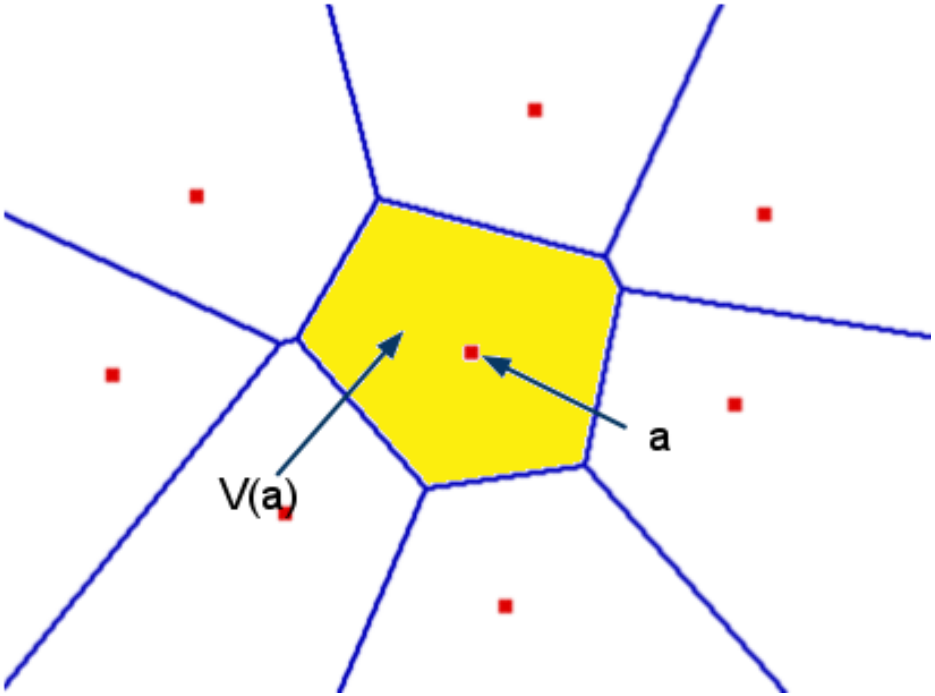
Кажуть, що в Англії ці поняття вчать на рівні середньої школи. А у нас?

Для скінченної множини A у метричному просторі (X, d) *кліткою Вороного* точки $a \in A$ називають множину

$$V(a) = \{x \in X : d(x, a) = \min\{d(x, p) : p \in A\}.$$

Клітки Вороного різних точок $a \in A$ задають *розбиття Вороного* простору X.

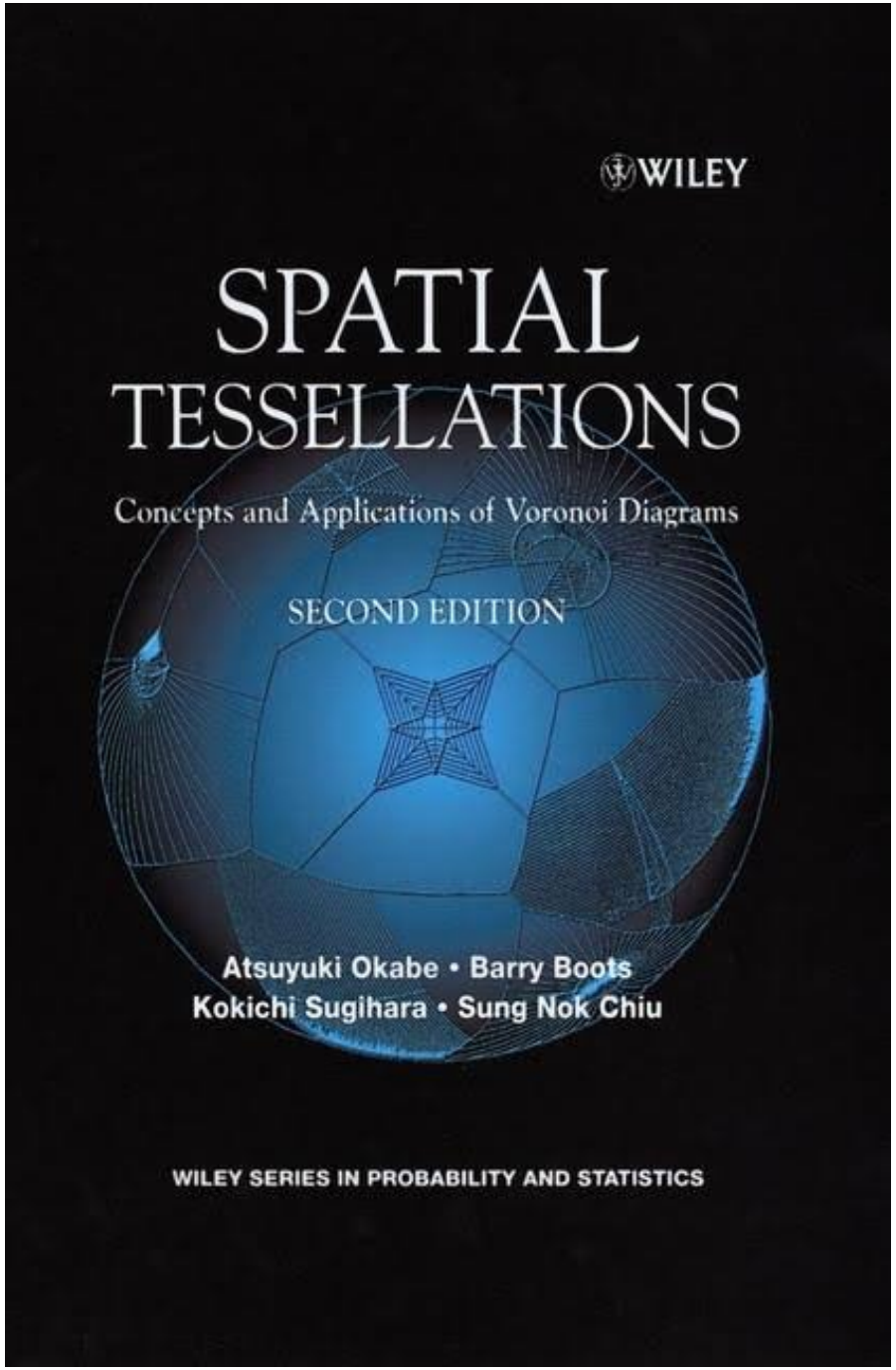
Межі кліток Вороного утворюють *діаграму Вороного*.



Розбиття Вороного дуже часто постають на практиці в найрізноманітніших галузях:

- ***Астрономія***: розподіл галактик (піна Вороного);
- ***Археологія***: розподіл впливів різних племен;
- ***Містопланування***: розміщення шкіл, супермаркетів;
- ***Мобільний зв'язок***: планування ретрансляційних веж;
- ***Фізіологія***: капілярне кровопостачання тканин.

Автори відомої книжки задаються питанням, чому діаграми Вороного називаються саме так, адже це природні об’єкти, які виникали у працях науковців задовго до Вороного.



Як аргумент вони наводять рисунок з книги Декарта.

Клітки Вороного вивчалися багатьма науковцями, які давали їм найрізноманітніші назви (наприклад, «плезіогедрон» авторства відомих геометрів Грюнбаума і Шеферда).

Чому все ж прижилася саме така назва: клітки Вороного?

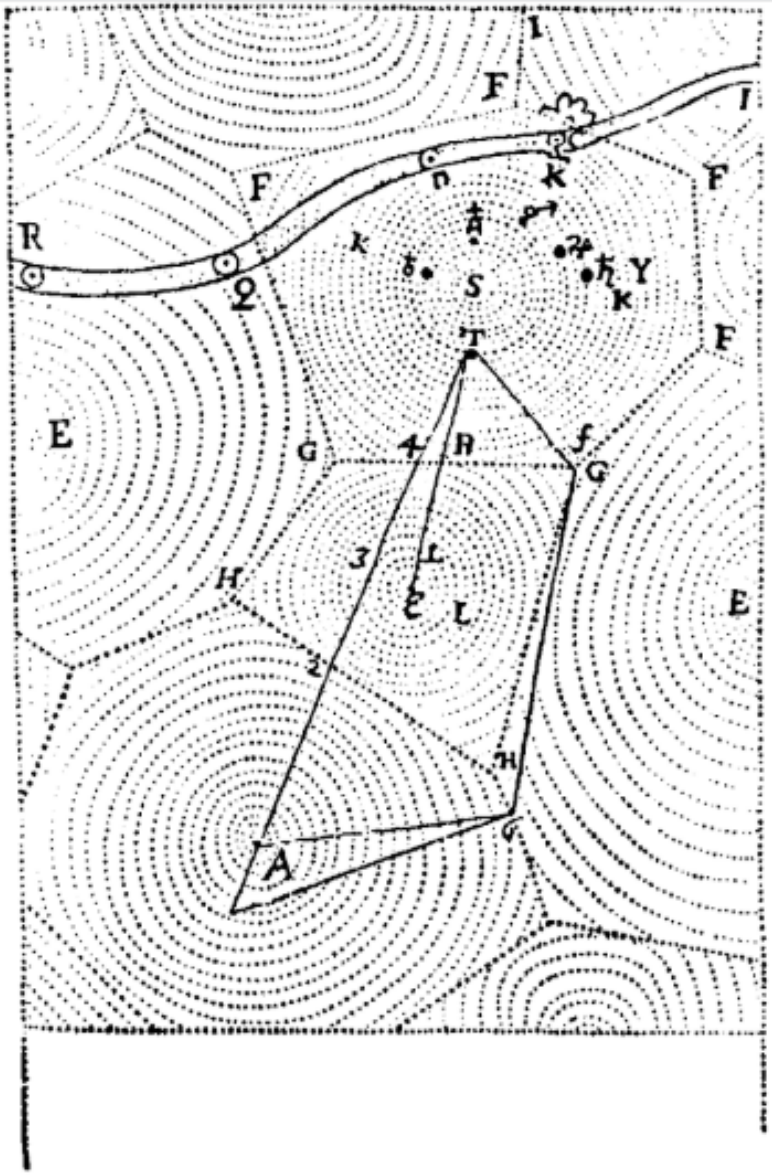


Figure 1.2.1 The disposition of matter in the Solar System and its environs by Descartes (S is the sun; ϵ is a star; RQD represents the path of a comet; polygonal areas represent heavens). (*Source*: Copy of the original in Descartes, 1644, reproduced in Mahoney, 1979.)

Відповідь проста: Вороний мав лише двох учнів, зате яких!

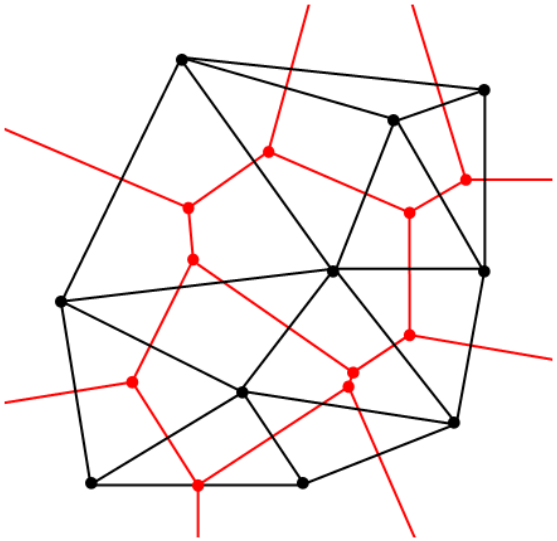
Вацлав Серпінський
(5012)

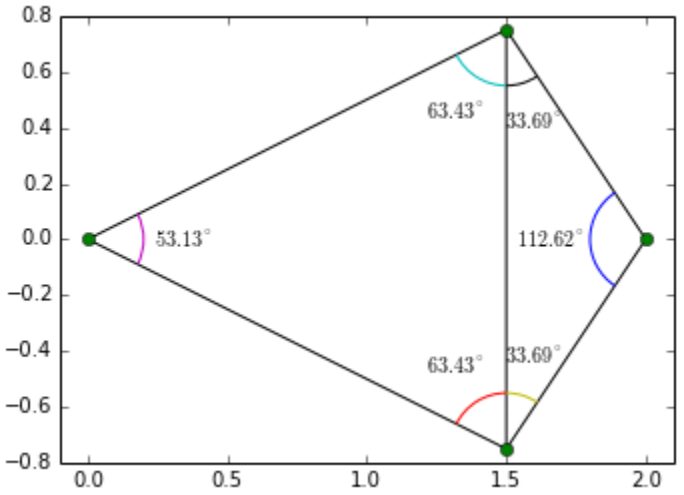
Борис Делоне
(1297)

5012 і 1297 – це кількість послідовників
згідно з Mathematical Genealogy Project.

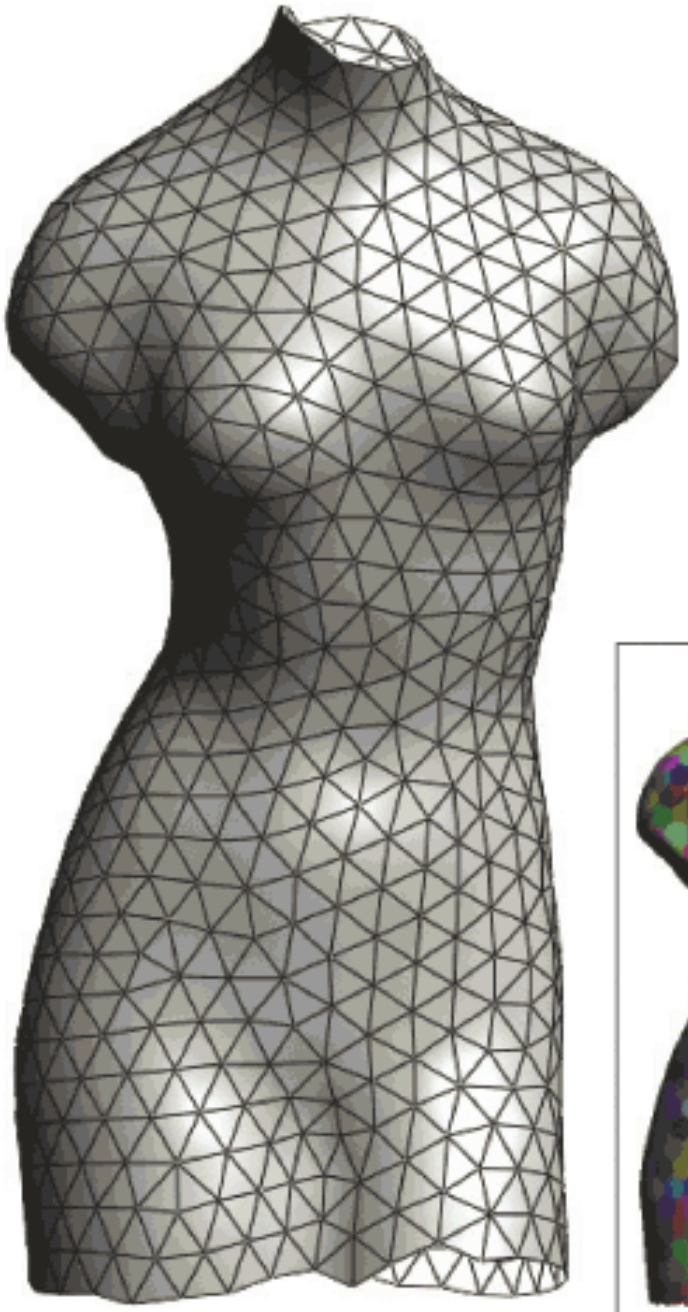
Саме Делоне ввів у вжиток і популяризував термін “клітки Вороного”, які він також називав клітками Діріхле-Вороного.

Клітки Вороного дуальним чином пов’язані з так званими триангуляціями Делоне: якщо з’єднати кожні дві сусідні сайти Вороного ребром, отримаємо *триангуляцію Делоне*.





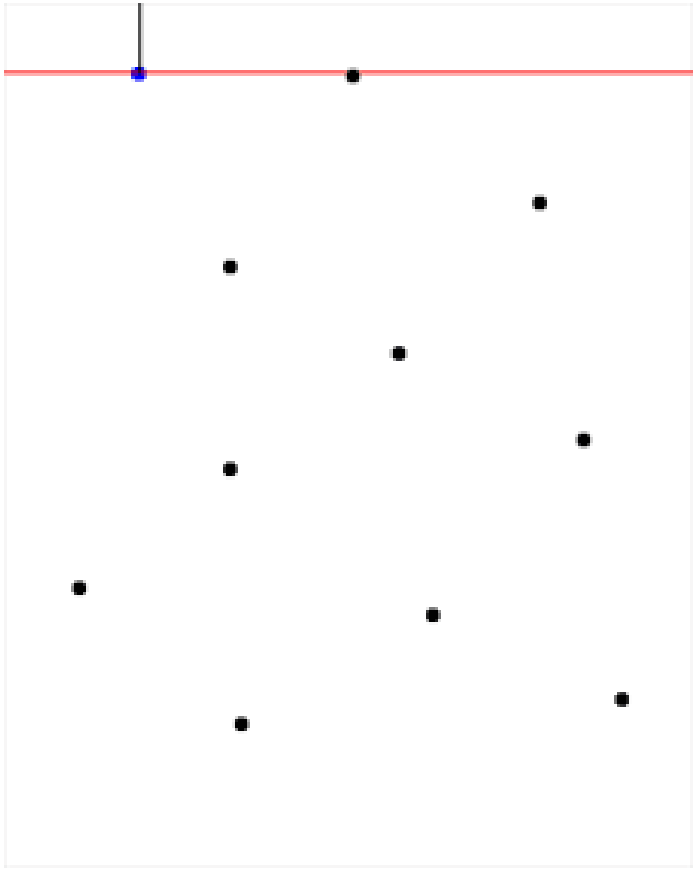
Ця триангуляція має характеристичну властивість: трикутники цієї триангуляції найбільш близькі до правильних. Саме на цій властивості базуються деякі алгоритми обчислення триангуляцій Делоне: виходимо з довільної триангуляції і перекидаємо діагоналі у чотирикутниках, доки не отримаємо триангуляції Делоне. Тоді серединні перпендикуляри до ребер цієї триангуляції утворять діаграму Вороного.



Триангуляція Делоне має широкі застосування в обчислювальній математиці (метод скінченних елементів), комп’ютерній графіці (моделювання поверхонь), автоматичному керуванні тощо.

Для обчислення діаграм Вороного існують швидкі алгоритми, зокрема sweep line algorithm, винайдений у 1986 році американським програмістом Stiven Fortune з Bell Lab. Цей алгоритм малює діаграму Вороного для n сайтів з швидкістю O(n ln n) і з такою ж швидкістю будує триангуляцію Делоне.

Stiven Fortune

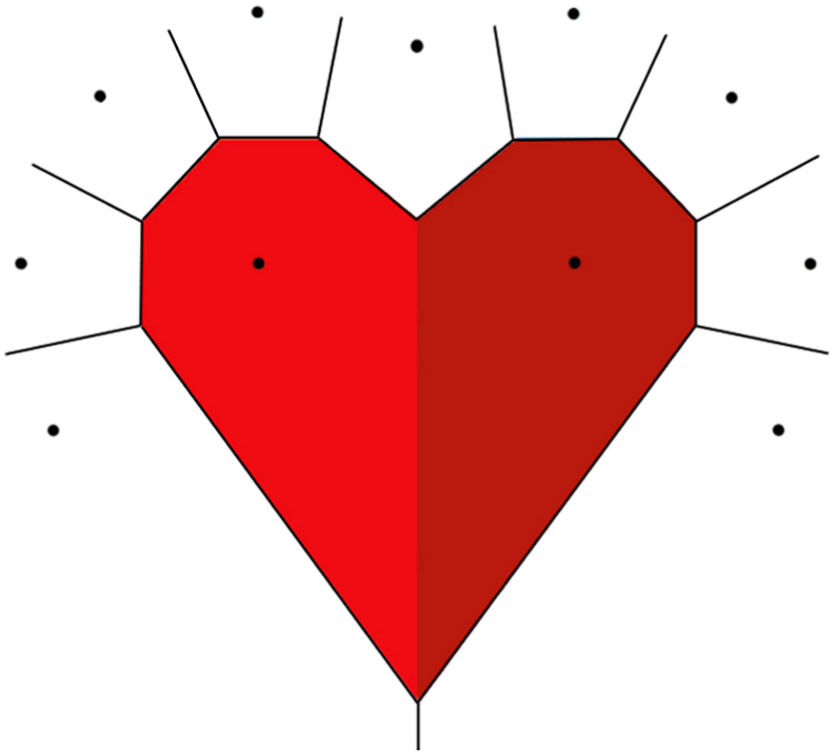


До речі, Делоне, як і Вороний, має безпосереднє відношення до України. Делоне народився у 1890 у Санкт-Петербурзі у сім'ї професора механіки. У 1900 його сім'я переїжджає до Києва. З 12 років Делоне самостійно займається математикою, у 1908 році (рік смерті Вороного) вступає до Київського університету, де продовжує займатися математикою під керівництвом відомого київського алгебраїста Дмитра Граве. З 1913 по 1916 роки Делоне викладав в Київському університеті, у 1916 – 1922 – у Київській політехніці. У 1922 повертається в Росію.

Про це написано у російській вікіпедії.
В українській вікіпедії про українську сторінку біографії Делоне – ні слова. Дива та й годі.

На цій оптимістичній ноті
дозвольте завершити свою доповідь.

Дякую за увагу!

I  Voronoi diagrams