

Аксиоматичні Теорії Множин: ZFC versus NBG

Тарас Банах

(Львів, карантин, 13 квітня 2020)

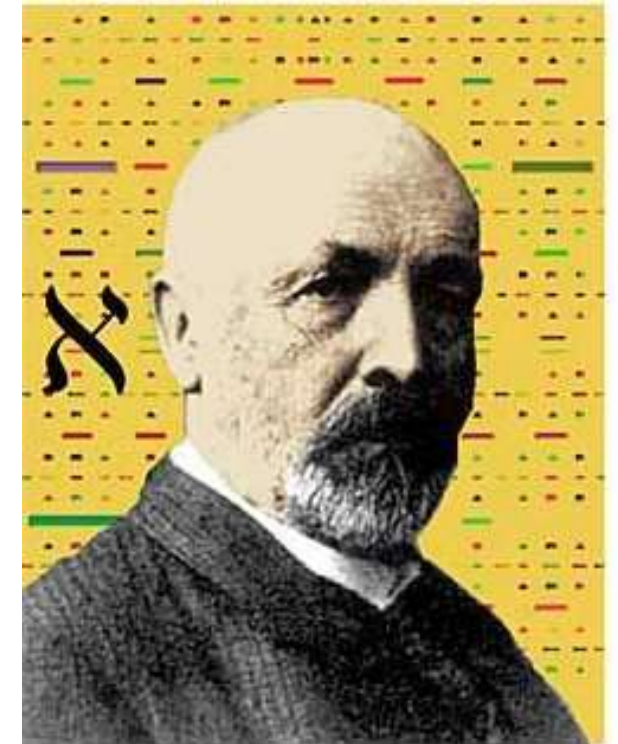
Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.
Давид Гільберт

Під кінець 19-го століття Георг Кантор створив теорію множин, яка дозволила навести лад у понятійному хаосі, що панував у математиці у той час.

За допомогою поняття множини вдалося строго означити усі наявні математичні об'єкти, навіть такі фундаментальні, як функція чи натуральне число.

Множиною Кантор називав довільну сукупність об'єктів розуму. Ці довільні об'єкти x_1, \dots, x_n можна згребти до купи і утворити нову множину $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, елементами якої є ці об'єкти.

Той факт, що x_i є елементом множини X позначається символом належності $x_i \in X$.



Georg Cantor 1845-1918

Георг Кантор
Творець теорії множин

Таким нехитрим способом можна означити, наприклад, натуральні числа і також множину ω натуральних чисел:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{0\}$$

$$2 = \{0, 1\}$$

$$3 = \{0, 1, 2\}$$

$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

...

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Множини можна також утворювати, згрібаючи в купу усі об'єкти, що володіють певною властивістю ϕ . Таким чином утворюється множина $\{x: \phi(x)\}$.

Але тут виникає певний нюанс.

Що можна вважати властивістю, а що ні?

Berry's Paradox: Назвемо число *малим*, якщо його можна означити формулою, що містить не більше 100 символів, і *великим* в іншому випадку. Легко бачити, що малих чисел скінченна кількість, і тому великі числа існують. Візьмемо серед них найменше. З одного боку, це число велике. З іншого боку, його означення – “найменше велике число” - містить (набагато) менше символів ніж 100.

Де тут проблема?

Вона в тому, що означення найменшого великого числа містить (неявно) квантор, що пробігає по усіх означеннях, включно з ним самим.

Як боротися з парадоксом Беррі?

Формули теорії множин

З парадоксом Бері теорія множин розправилася досить просто. Достатньо строго означити поняття властивості, обмежуючи при цьому область дії кванторів і заборонити їм перебирати формули.

Властивості ототожнюються з певними формулами мови теорії множин.

Мова складається з речень, які складаються зі слів, а ті, в свою чергу, з букв.

Тому почнемо з букв, а саме з алфавіту мови теорії множин, який включає:

- символи змінних: x, y, z, a, b, c, \dots
- символи бінарних відношень: $=$ і \in
- логічні зв'язки: \neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow
- квантори: \exists \forall
- дужки
- не обов'язково, але корисно, символи для означуваних понять: $\emptyset, \omega, \cap, \cup, \subseteq, \notin$

Тепер можемо дати строго (індуктивне) означення формули:

- 1) якщо x, y є символами змінних, тоді слова $x=y$ і $x \in y$ є (атомарними) формулами
- 2) якщо ϕ і ψ є формулами, тоді $\neg \phi$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$, $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ теж формули
- 3) якщо ϕ є формулою, тоді для будь-якого символу змінної x вирази $\forall x \phi$ та $\exists x \phi$ є формулами
- 4) інших формул окрім тих, що утворені за правилами 1)–3) немає.

Вільні змінні у формулах

Для строгого означення *властивості* нам потрібно означити поняття вільної змінної у формулі.

Кожній формулі ϕ теорії множин припишемо множину $\text{Free}(\phi)$ її вільних змінних індукцією по складності формули:

- 1) $\text{Free}(x=y)=\text{Free}(x \in y)=\{x,y\}$
- 2) $\text{Free}(\neg \phi)=\text{Free}(\phi),$
- 3) $\text{Free}(\phi \vee \psi)=\text{Free}(\phi \wedge \psi)=\text{Free}(\phi \Rightarrow \psi)=\text{Free}(\phi \Leftrightarrow \psi)=\text{Free}(\phi) \cup \text{Free}(\psi)$
- 4) $\text{Free}(\forall x \phi)=\text{Free}(\exists x \phi)=\text{Free}(\phi) \setminus \{x\}.$

Коли ми записуємо формулу як $\phi(x_1, \dots, x_n)$ маємо на увазі, що $\text{Free}(\phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

Означення: *Властивістю* множини називається довільна формула з єдиною вільною змінною.

Зауваження: Мати коротке (чи довге) означення не є властивістю натурального числа, бо воно не виражається формулою теорії множин.

Парадокс Беррі усунувся шляхом заборони використовувати в конструюванні множин виду $\{x: \phi(x)\}$ властивостей, що не описуються формулами теорії множин (з єдиною вільною змінною).

*Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.
Ніхто не зможе вигнати нас з Раю, створеного для нас Кантором*
Давид Гільберт

Парадокс Рассела (1901): Розглянемо цілком законну властивість ϕ множини x , яка виконується тоді і лише тоді, коли $x \notin x$.

Ця властивість визначає множину

$$A = \{x: \phi(x)\} = \{x: x \notin x\},$$

щодо якої є альтернатива:

1) $A \in A$, і тоді A не має властивості ϕ , і отже $A \notin A$,

або

2) $A \notin A$, і тоді A має властивість ϕ , і $A \in A$.

В обидвох випадках отримуємо суперечність.

Цим «ніхто» виявився британський філософ Берtrand Рассел



Як на цей парадокс відреагували математики?

Математики почали розглядати парадокс Рассела з усіх боків і шукати, яким чином його можна уникнути. З цього приводу думки розділилися.

Інтуїціоністи на чолі з Брауером вважали, що проблема в «або»:

Згідно з правилом виключення третього,

1) $A \in A$, і тоді A не має властивості ϕ , і отже $A \notin A$,

або

2) $A \notin A$, і тоді A має властивість ϕ , і $A \in A$.

Як розв'язання парадоксу, інтуїціоністи пропонували виключити правило виключення третього з правил логіки як ненадійне, аргументуючи, наприклад таким прикладом:

Нехай $n=1$, якщо гіпотеза Рімана вірна, і $n=0$, якщо не вірна.

Означення числа коректне чи ні? Якщо коректне, то чому воно рівне?

І чому тоді його значення залежить від успіхів або невдач людства у доведенні гіпотези Рімана, у той час як математика має бути об'єктивною наукою, не залежною від примх долі?

Реакція Цермело-Френкеля та ZF-компанії

Цермело та його послідовники (тобто усі сучасні математики за рідкими винятками) вважали, що з правилом виключення третього все гаразд, а проблема в аргументі Рассела полягає в занадто вільному поводженні зі змінною x у конструкторі:

Аргумент Рассела: Розглянемо множину

$$A = \{x: x \notin x\}$$

Згідно з правилом виключення третього, можливі випадки:

- 1) $A \in A$, і тоді $A \notin A$, або
- 2) $A \notin A$, і тоді $A \in A$.

Рецепт лікування: **Заборонити** використання формування множин методом $\{x: \phi(x)\}$, вважаючи його ненадійним; **дозволити** лише **обмежену** версію цього методу, формуючи підмножини $\{x \in X: \phi(x)\}$ всередині вже наявної множини X .

Цей рецепт прижився, і його використовує зараз більшість сучасних математиків, які звикли займатися самоцензурою, що прививалася їм з університетської лави, і, як наслідок, вони наступають на горло власній пісні.

Запізніла відповідь ПІГАНТІВ думки

Була ще одна (на жаль, дещо запізніла) реакція, але зате найглибших мислителів ХХ-го століття: фон Ноймана, Робінсона, Бернайса, Геделя, які вважали, що проблема з аргументом Рассела у слові **множина**, як надто вузькому понятті.

Аргумент Рассела: Розглянемо **множину**

$$A = \{x: x \notin x\}$$

Згідно з правилом виключення третього, можливі випадки:

- 1) $A \in A$, і тоді $A \notin A$, або
- 2) $A \notin A$, і тоді $A \in A$.

Рецепт лікування: **Розширити** поняття множини до поняття класу, але зважати на те, що класи можуть бути занадто великими сукупностями, щоб слугувати елементами інших класів.

Дозволити формування класів методом $\{x: \phi(x)\}$, але вважати, що при цьому елементами класів є лише множини. При такому підході парадокс Рассела перетворюється у доведення того, що клас $A = \{x: x \notin x\}$ не є множиною.

Як Ви вважаєте, що вибрали математики? **Свободу і вільний політ думки**, чи **обмеження і самоцензуру**? Ото ж бо й воно! Тут доречно згадати про Новий Завіт чи легенду про Данко.

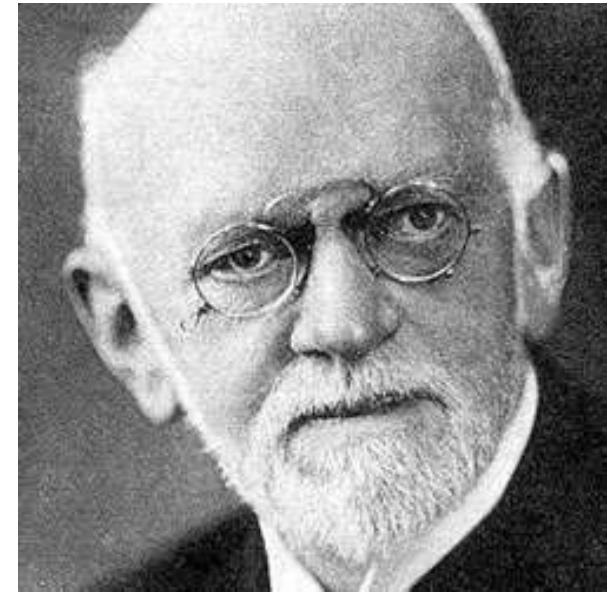
А тепер по порядку (хронологічному).

Формалісти

Ми не будемо вдаватися у пошуки інтуїціоністів, а займемося школою формалістів (на чолі з Давидом Гільбертом).

Щоб уникнути можливих парадоксів, формалісти запропонували будувати теорію множин на аксіоматичній основі, обмежуючи методи побудови нових множин чітко прописаними у аксіомах правилами.

У 1908 році Ернст Цермело (представник школи формалістів) запропонував першу успішну аксіоматику теорії множин.



Давид Гільберт

Аксиоми Цермело (1908)

1. **Аксиома рівності:** Дві множини рівні тоді і лише тоді, коли вони складаються з однакових елементів.
2. **Аксиома пари:** Для довільних множин x, y існує множина $\{x, y\}$, що містить x, y як елементи.
3. **Схема Аксиома Вирізання:** Нехай $\varphi(x)$ - формула з єдиною вільною змінною x . Для кожної множини X існує множина $\{x \in X: \varphi(x)\}$.
4. **Аксиома експоненти:** Для довільної множини x існує множина $\mathcal{P}(x)$, що містить усі підмножини множини x .
5. **Аксиома об'єднання:** Для довільної множини x існує множина $\cup x$, що містить усі елементи елементів множини x .
6. **Аксиома нескінченності:** Існує порожня множина, а також множина, що містить порожню множину як елемент і разом з кожним елементом x містить його наступника $x \cup \{x\}$.
7. **Аксиома Вибору:** для довільної множини a існує функція f , що ставить у відповідність кожній непорожній підмножині $x \in a$ деякий елемент $f(x) \in x$.



Ернст Цермело

Схема аксіом заміни Френкеля

У 1922 Абрахам Френкель зауважив, що в аксіоматиці Цермело неможливо довести існування множини

$\{\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots\}$, де $\aleph_0 = \omega$ і $\aleph_{n+1} = \mathcal{P}(\aleph_n)$ для $n \in \omega$.

Щоб це можна було зробити, він запропонував доповнити список аксіом Цермело аксіомою заміни.

Схема аксіом заміни: Нехай $\phi(x, y, c_1, \dots, c_n)$ – формула з вільними змінними x, y, c_1, \dots, c_n .

Нехай a, c_1, \dots, c_n – множини такі, що для довільного елемента $x \in a$ існує єдина множина y , що задовольняє формулу $\phi(x, y, c_1, \dots, c_n)$.

Тоді існує множина $\{y: \exists x (x \in a \wedge \phi(x, y, c_1, \dots, c_n))\}$.



Абрахам Френкель

Аксиома Регулярності фон Ноймана

Аксиома Регулярності: Кожна непорожня множина містить елемент, що не має з множиною спільних елементів.

Аксиома регулярності забороняє існування множин, які є своїми власними елементами. Більш загально, вона забороняє існування послідовностей множин x_1, x_2, x_3, \dots , у якій кожна наступна множина є елементом попередньої.

При аксіомі регулярності клас V усіх множин зображається як об'єднання

$$V = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$$

трансфінітної послідовності множин V_α індексованих ординалами, де $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ для довільного ординала α і $V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta$.

Аксиому регулярності запропонував Джон фон Нойман, який теж довів, що ця аксіома не суперечить решті аксіом Цермело – Френкеля, проте її наявність значно спрощує розуміння структури теоретико-множинного універсуму.



Джон фон Нойман

Аксиоми ZFC (версії 1929 року)

Так виникла панівна тепер система аксіом ZFC. Вона включає 7 аксіом та дві (нескінченні) схеми аксіом:

1. **Аксиома рівності:** Дві множини рівні тоді і лише тоді, коли вони складаються з однакових елементів.
2. **Аксиома пари:** Для довільних множин x, y існує множина $\{x, y\}$, що містить x, y як елементи.
3. **Схема Аксиома Вирізання:** Нехай $\varphi(x)$ - формула з єдиною вільною змінною x . Для кожної множини X існує множина $\{x \in X: \varphi(x)\}$.
4. **Схема Аксиом Заміни.** Образ множини при функції, яка задається формулою, є множиною.
5. **Аксиома експоненти:** Для довільної множини x існує множина, що містить усі підмножини множини x .
6. **Аксиома об'єднання:** Для довільної множини існує множина, що містить усі елементи її елементів.
7. **Аксиома нескінченності:** Існує порожня множина, а також множина, що містить порожню множину як елемент і разом з кожним елементом x містить його наступника $x \cup \{x\}$.
8. **Аксиома Регулярності:** Кожна непорожня множина X містить елемент, який не має з множиною X спільних елементів.
9. **Аксиома Вибору:** для довільної множини a існує функція f , що ставить у відповідність кожній непорожній підмножині $x \in a$ деякий елемент $f(x) \in x$.

У 1961 році Montague довів, що ZFC не є скінченно аксіоматизовною.

Аксиоми фон Ноймана-Бернайса-Геделя

Тепер повернемося до **ГІГАНТІВ** думки (фон Нойман, Бернайс, Гедель), які представили світу свою аксіоматичну систему у 1931 році (Бернайс) та 1940 (Гедель).

Будучи представниками школи формалістів Гільберта, вони теж вибрали аксіоматичний підхід, проте як первинне (неозначуване поняття) вибрали поняття **класу**. Множину вони визначали як клас, що є елементом іншого класу.

Як наслідок такої невинної заміни неозначуваного поняття, вдалося отримати струнку та елегантну скінченну систему аксіом, яку можна швидко пояснити студентам, не вдаючись у логічні тонкощі формул та їх вільних змінних.



Далі виклад використовує web-сторінку Вікіпедії,
яку можна знайти за назвою:

Теорія множин фон Неймана — Бернайса — Геделя