

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію **Войтович Марії Андріївни**
*“Асимптотичні властивості субгармонійних та аналітичних функцій
в одиничній кулі”,*

подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

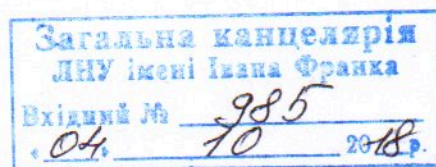
Актуальність дослідження. Відомо, що властивості аналітичних та субгармонійних функцій тісно пов'язані з їх зростанням. Тому класичними об'єктами вивчення є класи Гарді обмежених аналітичних функцій, класи Неванлінни аналітичних функцій з обмеженою характеристикою, субгармонійних функцій з обмеженими інтегральними середніми та їхні узагальнення, в тому числі і багатовимірні. Такими задачами для одиничного круга займалися Ф. Рісс, В. Смирнов, І. Привалов, Е. Беллер, М. Цудзі, М. Арсов, О. Фростман, М. Джрбашян, Ф. Шамоян, Ч. Горовіц та інші.

Клас M -субгармонійних функцій є одним з n -вимірних узагальнень субгармонійних функцій. Для M -субгармонійних функцій виконується аналог теореми Рісса про розклад M -субгармонійної функції у різницю M -гармонійної функції і інваріантного потенціалу Гріна. Тому велике значення у вивченні всього класу M -субгармонійних функцій мають потенціали Гріна. Точну оцінку швидкості зростання $m_p(r, G_\mu) = \left(\int_S |G_\mu(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}$, $p > 0$, де G_μ – інваріантний потенціал Гріна на $B = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$, при $n > 1$ для всього класу борелевих мір, які задовольняють умову $\int_B (1 - |w|^2)^n d\mu(w) < \infty$, знайшов М. Столл. Але оцінка, знайдена М. Столлом не враховує властивостей конкретної міри μ . Тоді, як властивості гладкості повної міри або міри Грішина субгармонійної функції дозволяють описати зростання відповідного потенціалу. Зокрема для одновимірного комплексного простору І. Е. Чижикивим знайдено необхідні і достатні умови для оцінки зростання p -их середніх субгармонійних функцій в термінах властивостей міри Рісса. У даній дисертації цей результат узагальнено для багатьох комплексних змінних. Також описано зростання p -их середніх інваріантного потенціалу Гріна $m_p(r, G_\mu)$ в термінах властивостей міри μ , що узагальнює результати Столла. Крім того, досліджується зростання аналітичних та гармонійних функцій в одиничній кулі, які можна представити у вигляді інтегралу Коші-Стілтєса та інтегралу Пуассона-Стілтєса, що є не менш важливими об'єктами через велику кількість застосувань у рівняннях математичної фізики, теорії потенціалу, тощо.

У третьому розділі узагальнено результат Йонг Чан Кіма та Тошіюкі Сугави, які спростували гіпотезу Гансена, щодо поведінки максимуму модуля λ -спіралеподібних функцій на колі радіуса r ($0 < r < 1$). Описано максимальну швидкість зростання $\delta_f(r)$ для класу λ -спіралеподібних в одиничному крузі функцій та оцінено коефіцієнти з розкладу в ряд Тейлора для екстремальної функції f .

З огляду на сказане вище, задачі досліджені в дисертації є актуальними.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Основні результати дисертаційної роботи містяться у другому і третьому розділах. Зокрема, у другому розділі описано зростання середніх інваріантного потенціалу Гріна в термінах властивостей міри μ , що є узагальненням результату М. Столла, який знайшов точну оцінку швидкості зростання $m_p(r, G_\mu)$, для $1 \leq p < \frac{2n-1}{2n-3}$, без урахування властивостей конкретної міри μ . Також



знайдено непокрашувані оцінки зростання $m_p(r, G_\mu)$ для $0 < p < 1$. Досліджено асимптотичну поведінку p -их середніх недоводатних M -субгармонійних функцій, які зображуються у вигляді $u(z) = H_u(z) - \int_B G(z, w) d\mu_u(w)$, де H_u — найменша M -гармонійна мажоранта функції u , у термінах гладкості міри Рісса μ та межової міри. Теорема 2.5 узагальнює результат І.Е. Чижикова для субгармонійних функцій в одновимірному комплексному просторі. Отримано точну оцінку зростання інтегралу Коші-Стільтьєса в одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$ в термінах гладкості міри Стільтьєса та оцінку зростання інтегралу Пуассона-Стільтьєса. У третьому розділі узагальнено результат Йонг Чан Кіма та Тошіюкі Сугава, які спростували гіпотезу Гансена щодо поведінки максимуму модуля λ -спіралеподібних функцій на колі радіуса r ($0 < r < 1$).

Усі отримані у дисертаційній роботі результати є новими, а їх доведення не викликають сумніву.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень. Усі формулювання основних результатів дисертаційної роботи Войтович Марії Андріївни є правильними і новими. Вони доведені на сучасному математичному рівні і не виникає сумнівів щодо їхньої достовірності.

Зауваження. Дисертаційну роботу оформлено на належному науковому рівні, проте наявна певна кількість описок і недоглядів. Зокрема,

- с.15⁹ має бути "... та для всіх достатньо малих r ...";
- с.15⁹ у реченні "Поняття та теорія M -субгармонійних функцій належить Девіду Ульріху ..." варто обмежитись словом поняття, оскільки теорія є загальним надбанням;
- с.16₁₀ не можна вживати "... де B — добуток Бляшке ...", якщо в переліку умовних позначень та в попередньому тексті дисертації B вже позначає одиничну кулю в $\mathbb{C}^n$;
- с.17¹⁰ замість "... описані Чижиковим та Золотою..." слід писати "... описані І. Е. Чижиковим та О. А. Золотою...";
- с.17₁₁ замість "... узагальнено результат Йонг Чан Кім та Тошіюкі Сугава..." потрібно "... узагальнено результат Йонг Чан Кіма та Тошіюкі Сугави..." ;
- с.18_{5,6,7}, а також 14^{2,4}, 17^{2,3,4}, 19^{2,5,9}, 31_{2,6,11,12} замість "...Стільтьєса ..." набрано "...Стільтьєса ...";
- с.20₁ замість "... загальне керівництво над роботою ..." слід писати "... загальне керівництво роботою ...";
- с.22₃ повинно бути "... $\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}$ — звичайний лапласіан.";
- с.24¹¹ замість "Для класу субгармонійних функцій ..." має бути "Для класу M -субгармонійних функцій ...";
- с.30¹¹ в означенні однорідного многочлена варто вказати, що дана рівність має виконуватись $\forall \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n$;
- с.31⁶ у цитованій Теоремі G ([35]) не зовсім зрозуміло звідки виникає A_α ;
- с.34₃, 35_{3,10}, 36⁴ у формулюваннях теорем 2.1-2.4 та наслідку 2.2 замість "... і нехай μ — борелева міра..." варто вживати "..., а μ — борелева міра...";
- с.35₅ повинно бути "Введемо такий аналог повної міри Грішина. Для підкласу M -субгармонійних функцій міра λ визначена ...";

- с.39_{8,9} замість “гіпотеза Хансена рівносильна припущенню, що величина $\delta_f(r)$ обмежена зверху. З прикладу Кіма та Сугави випливає, що...” слід писати “Гіпотеза Хансена рівносильна з припущенням, що величина $\delta_f(r)$ обмежена зверху. З прикладу Йонг Чан Кіма та Тошіюкі Сугави випливає, що...” ;
- с.39₄ в зауваженні 1.8 зустрічаємо “ З означення q_0 випливає ...”, хоча насправді означення q_0 немає ні в переліку умовних позначень, ні в поперньому тексті;
- с.42₈ замість “темніах” повинно бути “термінах”;
- с.74⁶ у формулі (2.39) повинно бути “ $\int_B \psi d\mu_u = \int_B \psi \tilde{\Delta} u d\tau$ ”;
- с.101₅ потрібно “ $\theta = \arg \lambda \omega$, $\omega \in e^{i\theta} \gamma(\mathbb{R})$ ”;
- с.105¹⁰ для позначення функції H варто використати інший символ, оскільки H у попередньому розділі позначали найменшу M -гармонійну мажоранту.

Звісно, перераховані неточності в оформленні дисертації М. А. Войтович істотно не впливають на зміст і сприйняття тексту дисертації та не викликають сумнівів у правильності основних математичних здобутків дисертантки.

Висновки. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер та можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії потенціалу та теорії функцій багатьох комплексних змінних. В ній досліджено асимптотичне поведіння p -их середніх значень недодатних M -субгармонійних функцій в одиничній кулі в термінах властивостей міри Рісса та межової міри, описане зростання інтегралів Коші-Стілтєса і Пуассона-Стілтєса в одиничній кулі та зростання спіралеподібних в одиничному крузі функцій. Цим істотно доповнюється класична теорія субгармонійних та аналітичних функцій. Все це дає підстави стверджувати, що дисертаційна робота М. А. Войтович є завершеним виконанням на актуальну тематику науковим дослідженням, у якому розроблено теоретичні положення, що можна кваліфікувати як новий вклад у теорію субгармонійних та аналітичних функцій. Основні результати дисертації М. А. Войтович опубліковано і анонсовано у 6 (з них 1 - одноосібно) статтях у виданнях [1-6] в яких слід публікувати результати дисертації, зокрема 2 ([1,4]) – у закордонних виданнях, 3 ([2,4,6]) – з бази даних SCOPUS і 7 тезах конференцій різного рівня.

З огляду на сказане вище, вважаю, що дисертаційна робота М. А. Войтович “Асимптотичні властивості субгармонійних та аналітичних функцій в одиничній кулі” задовольняє вимоги “Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника”, результати дисертаційної роботи відповідають вимогам до наукового рівня результатів (актуальність, новизна, наукова значимість) кандидатської дисертації, а її автор, **Войтович Марія Андріївна**, заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01. — математичний аналіз.

Офіційний опонент

доцент, кандидат фізико-математичних наук,

доцент кафедри вищої математики

Національного університету

“Львівська політехніка”

Т.М. Сало

Підпис керівника:

Вчений секретар

НУ “Львівська політехніка”



Р. Б. Бриниш