

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Войтович Марії Андріївни
"Асимптотичні властивості субгармонійних та аналітичних
функцій в одиничній кулі",
подану на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук за спеціальністю
01.01.01 – математичний аналіз

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню багатовимірних узагальнень субгармонічних функцій в одиничній кулі. Зазначу, що замість терміну "субгармонічна функція" в дисертації використовується термін "субгармонійна функція".

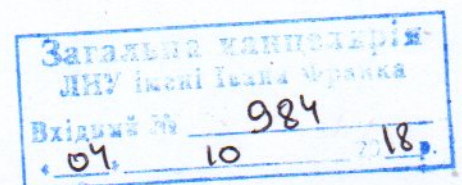
Основи теорії субгармонічних функцій були закладені Ф. Ріссом. Фундаментальне значення для побудови цієї теорії мала теорема Рісса про представлення субгармонічної функції у вигляді суми потенціала і гармонічної функції.

Сьогодні теорія субгармонічних функцій є, так би мовити, ядром сучасної теорії потенціалу і продовжує інтенсивно розвиватися з огляду на численні застосування як в теорії аналітичних функцій, так і в теорії еліптичних рівнянь з частинними похідними.

Одним із перспективних узагальнень поняття субгармонічної функції на багатовимірні простори є так звані M -субгармонічні функції, введені Д. Ульріхом у 80-х роках минулого століття. Двічі неперервно диференційовна функція є M -субгармонічною в деякій області багатовимірного комплексного простору тоді і тільки тоді, коли інваріантний лапласіан від цієї функції є невід'ємним в усіх точках області. Для цих функцій справджується аналог теореми Рісса, а саме: M -субгармонічна функція є різницею M -гармонічної функції і потенціалу Гріна.

M -субгармонічні функції в одиничній кулі і пов'язані з ними потенціали Гріна, інтеграли Коші-Стілтєса та інтеграли Пуассона-Стілтєса є основними об'єктами дослідження в дисертації. Їх теорія на сьогодні є далекою від завершення і вимагає, зокрема, ґрунтовного дослідження їх асимптотичних властивостей при наближенні до межі одиничної кулі, чому, насамперед, і присвячена дана дисертаційна робота.

Отже, тематика досліджень дисертаційної роботи є вельми актуальною. Відзначу також, що дисертація виконана в рамках держбюджетних наукових тем Мг-159



Ф "Методи комплексного та гармонійного аналізу в теорії аналітичних функцій у банахових просторах" (номер держреєстрації 0113U000184) і Мг-145 Ф "Нові комплексно-ймовірнісні методи дослідження асимптотичних властивостей аналітичних і субгармонійних функцій, зображених випадковими рядами та інтегралами" (номер держреєстрації 0113U003051), що розробляються у Львівському національному університеті імені Івана Франка.

Ступінь обґрунтованості наукових положень, їх достовірність і новизна. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

В розділі 1 дисертації міститься огляд літератури за темою дослідження. В ньому лаконічно, але в той же час ґрунтовно, викладено основні результати теорії M -субгармонічних функцій, а також результати щодо інтегралів Коші-Стілтєса та Пуассона-Стілтєса, і сформульовано основні результати дисертації, що дає змогу простежити зв'язок між результатами автора і його попередників та виділити наукову новизну результатів дисертаційного дослідження.

Розділ 2 присвячено дослідженню асимптотичної поведінки величини

$$m_p(r, G_\mu) = \left(\int_S |G_\mu(r\xi)|^p d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 0,$$

при $r \rightarrow 1-0$ для інваріантного потенціалу Гріна G_μ в термінах міри μ , де S — одинична сфера і σ — нормована міра Лебега на S така, що $\sigma(S) = 1$, а також дослідженню асимптотичної поведінки величини $m_p(r, u)$ при $r \rightarrow 1-0$ для M -субгармонічної функції u у термінах гладкості її міри Рісса.

Доведені в дисертації теореми 2.1, 2.2, 2.4 доповнюють і уточнюють результати Столла, якому належать оцінки швидкості зростання величини $m_p(r, G_\mu)$ на класі борелевих мір μ , що задовольняють умову $\int_B (1 - |w|^2)^n d\mu(w) < \infty$, хоча і точні за порядком, проте такі, що не враховують властивостей конкретної міри μ .

В теоремі 2.5 знайдено необхідні і достатні умови степеневі оцінки зростання величини $m_p(r, u)$ при $r \rightarrow 1-0$ для M -субгармонічної функції u в термінах її міри Рісса, що узагальнює відповідні результати І. Чижикова, а також Я. Васильківа і Я. Микитюка, отримані для субгармонічних функцій в одиничному крузі комплексної площини. Випадки більш загальних оцінок зростання величини $m_p(r, u)$ при $r \rightarrow 1-0$ досліджено в теоремах 2.6, 2.7.

Крім того, дисертанткою знайдено точну оцінку зростання інтегралу Коші-Стілтєса (теорема 2.8) та оцінку зростання інтегралу Пуассона-Стілтєса (теорема 2.9) в одиничній кулі при наближенні до межі області за природніх обмежень на модуль неперервності міри Стілтєса, заданої на одиничній сфері.

Методи дослідження, розроблені в розділі 2, знайшли застосування в розділі 3 дисертації, де досліджується поведінка максимуму модуля $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ так званої λ -спіралеподібної однолистої аналітичної функції f , заданої в одиничному крузі комплексної площини. Доведена тут теорема 3.1 узагальнює результат Кіма та Сугави, які спростували гіпотезу Хансена щодо асимптотичної поведінки величини $M(r, f)$ при $r \rightarrow 1 - 0$.

Усі основні наукові результати дисертації є новими, чітко доведеними, і тому їх достовірність не викликає сумнівів.

Апробація і повнота викладу результатів в наукових фахових виданнях. Результати своєчасно і з належною повнотою опубліковано. Серед публікацій є 6 статей в наукових фахових виданнях, 3 з яких входять до міжнародної наукометричної бази Scopus. Слід також відзначити належну апробацію роботи на міжнародних конференціях і наукових семінарах. Автореферат адекватно відображає основні положення і висновки дисертаційної роботи.

До дисертації є зауваження:

1) в терміні "гармонійна функція", що став популярним останнім часом в українській науковій літературі, прикметник "гармонійний" є похідним від іменника "гармонія" (слово грецького походження, французьке *harmonie*, англійське *harmony*) у той час як першоджерелом відповідного математичного терміну є французьке *fonction harmonique* (його англійський аналог — *harmonic function*), звідки походять український іменник "гармоніка" і утворений від нього прикметник "гармонічний";

2) оскільки позначення $\mathbb{N}$ множини натуральних чисел багаторазово вживається в роботі без будь-яких пояснень, то слід було додати його в ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ (подекуди в роботі той же самий об'єкт позначається $\mathbb{Z}_+$ і також без пояснень). Також доцільно було б додати до цього ПЕРЕЛІКУ позначення міри Рісса μ_u функції u ;

3) в дисертації інтеграл Коші та інтеграл Коші–Стілтєса мають однакові позначення. Таке ж зауваження стосується інтегралу Пуассона та інтегралу Пуассона–Стілтєса;

4) в першому абзаці п. 2.1.1 означення поняття $a \asymp b$ дано некоректно, оскільки нерівність $c'a < b < c''a$ при фіксованих сталих c', c'' не може виконуватися "для всіх можливих a і b ". Крім того, позначення $\asymp$ використано в роботі раніше на с. 34 без відповідного роз'яснення;

5) в авторефераті на с. 8 при введенні повної міри Грішина λ не дано жодного роз'яснення з приводу того, що розуміється під мірами ν і μ_u . Таке ж зауваження стосується і тексту дисертації на с. 36 стосовно міри ν ;

6) на с. 16 у 10-му рядку зверху при посиланні на роботу [20] з двох співавторів роботи згадується лише один К.Т. Хан;

7) автор роботи [21] в дисертації називається як Хансенom (наприклад, на с. 39 у 9-му рядку знизу), так і Гансенom (наприклад, на с. 103 у 1-му рядку зверху);

8) в ряді місць не виділяються комами дієприкметникові звороти: наприклад, на с. 3 у 14-му рядку зверху, на с. 23 у 9-му і 6-му рядках знизу, на с. 42 у 5-му рядку зверху. Пропущені коми також і в деяких інших місцях, наприклад, на с. 101 в 6-му і 10-му рядках зверху — двічі перед словом "називається";

9) в ряді місць коми слід вилучити: наприклад, на с. 15 у 8-му рядку зверху, на с. 17 у 7-му рядку знизу після слова "функцій", на с. 22 у 6-му рядку зверху перед словом "через", на с. 34 у 5-му рядку зверху після слова "також", на с. 41 у 11-му рядку зверху перед словом "визначимо", на с. 43 у 10-му рядку зверху перед словом "теорема";

10) деякі результати інших авторів сформульовані в роботі повністю двічі. Так, теорема А сформульована с. 24 і на с. 74, теорема В зі с. 25 продубльована на с. 75 як теорема Е, а теорема Е зі с. 28 зустрічається також на с. 74 як теорема D;

11) формула (1.3) повторюється як формула (2.39), а формула (1.4) продубльована також як формула (2.40);

12) в дисертації і авторефераті зустрічаються деякі стилістичні неточності. Наприклад:

а) замість "асимптотична поведінка" в роботі вживається словосполучення "асимптотичне поводження": наприклад, на с. 18 у 13-му та 9-му рядках знизу, на с. 19 у 15-му і 13-му рядках знизу. Таке ж зауваження стосується і тексту автореферату на с. 4 у п. "Мета і завдання досліджень" і на с. 5 у п. "Наукова новизна одержаних результатів";

б) на с. 20 у 1-му рядку зверху та в авторефераті на с. 5 у п. "Особистий внесок здобувача" написано: "співавтору належать ... загальне керівництво над роботою та обговорення одержаних результатів", що є неточністю, оскільки належати можуть не процеси (керівництво, обговорення), а результати цих процесів (ідеї, результати, гіпотези тощо).

Наведені зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації.

В цілому, дисертація є завершеною науковою роботою, в якій ґрунтовно розвинено теорію багатовимірних узагальнень субгармонічних функцій. Результати роботи мають, насамперед, теоретичну цінність, проте не має сумнівів, що розвинені в ній методи знайдуть застосування в комплексному аналізі, теорії потенціалу та їх застосуваннях в теорії рівнянь з частинними похідними.

На підставі сказанного вважаю, що дисертація М.А. Войтович "Асимптотичні властивості субгармонійних та аналітичних функцій в одиничній кулі" задовольняє усі вимоги "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого (зі змінами і доповненнями) Кабінетом міністрів України, щодо кандидатських дисертацій, а її автор Войтович Марія Андріївна заслуговує присудження їй наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент

завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу

Інституту математики НАН України

доктор фіз.-мат. наук, професор

