

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Дмитришина Мар'яна Івановича

“Апроксимаційні простори, асоційовані з цілими
векторами експоненціального типу”,

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

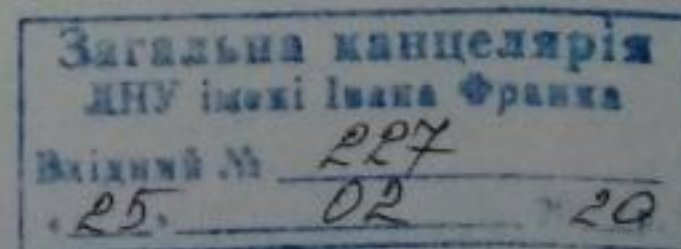
Актуальність теми дослідження. У працях Е. Нельсона (1959) було введено поняття аналітичного вектора, асоційованого з необмеженим оператором у банаховому просторі, і показано, що ціла низка проблем аналізу може розглядатися у контексті використання таких векторів. Зокрема, пов'язаних з представленнями груп Лі на банахових просторах, дослідженням властивостей розв'язків диференціально-операторних рівнянь. Далі ця тематика розглядалася у дослідженнях Р. Гудмана, С. Джіуліні, М. Л. Горбачука, О. В. Лопушанського, Я. В. Радино, Г. В. Радзієвського та інших.

В класі аналітичних векторів окремо було виділено цілі вектори експоненціального типу необмеженого оператора, які використовувались, зокрема, для побудови операторного числення, а також в теорії наближень різними класами гладких векторів необмеженого оператора в банахових просторах. Беручи в якості банахових просторів різні функціональні простори і оператори диференціювання, можна отримати цілий ряд результатів теорії наближень нескінченно диференційовних функцій алгебраїчними і тригонометричними многочленами, цілими функціями експоненціального типу. Отримані результати формулюються, зокрема, у вигляді нерівностей Джексона і Бернштейна.

Проте, багато задач, пов'язаних з даною тематикою, залишаються й надалі відкритими. А саме, тих, що стосуються точних оцінок констант в нерівностях Джексона і Бернштейна, а отже, й похибок апроксимацій різними класами функцій, зокрема, цілими функціями експоненціального типу у функціональних просторах. Також це стосується спектральних апроксимацій в банахових просторах кореневими векторами необмежених операторів, або ж кореневими функціями операторів диференціювання у функціональних просторах.

З огляду на вищезазначене, вважаю тему дисертаційної роботи, її мету та задачі обґрунтованими та актуальними.

Зміст роботи і новизна одержаних результатів. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків.



У першому розділі визначено суть операторного підходу до проблем теорії наближень в банахових просторах різними класами гладких векторів необмежених операторів та його адаптації до апроксимацій алгебраїчними і тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу у функціональних просторах у випадку оператора диференціювання. Розглянуто основні елементи теорії апроксимаційних просторів, наведено необхідні відомості з теорії інтерполяції просторів та теорії класичних просторів Бесова.

У другому розділі визначено і встановлено основні властивості нових класів просторів цілих векторів експоненціального типу замкненого оператора у банаховому просторі. Доведено, що простори цілих векторів експоненціального типу оператора з точковим спектром співпадають з лінійною оболонкою образів проекторів Ріса (теорема 2.1.5), зокрема, якщо спектр оператора складається із ізольованих власних значень скінченної алгебраїчної кратності, то простір всіх цілих векторів експоненціального типу співпадає з лінійною оболонкою його кореневих векторів, що далі дозволяє розглядати питання спектральних апроксимацій таких операторів у банахових просторах.

Визначено нові класи апроксимаційних просторів типу Бесова, асоційованих з необмеженими операторами у банаховому просторі і показано, що такі простори характеризуються як інтерполяційні простори, породжені дійсним K -методом інтерполяції (теорема 2.2.1).

Визначено також шкалу апроксимаційних просторів на областях визначення цілих степенів операторів і встановлено інтерполяційні властивості таких просторів (теореми 2.2.3, 2.2.4).

Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазі-норм визначених апроксимаційних просторів, що характеризують наближення заданого елемента банахового простору елементами інваріантних підпросторів цілих векторів експоненціального типу (теореми 2.3.1, 2.3.2, наслідок 2.3.1). При цьому отримано явну залежність констант від параметрів апроксимаційних просторів. Доведено теорему 2.3.5, що характеризує спектральні апроксимації для оператора з точковим спектром.

Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона, що характеризують наближення елементів простору C^m , що є областю визначення цілих степенів ($m \in \mathbb{N}$) оператора A , цілими векторами експоненціального типу (теореми 2.3.3, 2.3.4, наслідок 2.3.2).

Для оператора диференціювання в просторі сумовних функцій $L_q(\mathbb{R})$ доведено, що відповідний апроксимаційний простір при певних значеннях індексів співпадає з класичним простором Бесова (теорема 2.4.1). Для кла-

сичних нерівностей Бернштейна і Джексона обчислені значення констант, що визначаються параметрами простору Бесова (теорема 2.4.2).

У третьому розділі визначено і встановлено основні властивості інтерполяційних просторів цілих векторів експоненціального типу замкнутого оператора, породжених дійсним K -методом інтерполяції (теореми 3.1.1, 3.1.2). Доведено інтерполяційні теореми для просторів цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів на областях визначення їх цілих степенів (теореми 3.1.3-3.1.6).

Визначено і встановлено основні властивості інтерполяційних просторів цілих векторів експоненціального типу замкнутого оператора, породжених комплексним методом інтерполяції (теорема 3.2.1). Доведено інтерполяційну теорему для просторів цілих векторів експоненціального типу необмежених операторів на областях визначення їх цілих степенів, породжених комплексним методом інтерполяції (теорема 3.2.2).

Введено та описано інтерполяційні властивості нових класів просторів цілих векторів експоненціального типу на областях визначення комплексних степенів позитивних операторів (теореми 3.3.1, 3.3.2). Визначено також апроксимаційні простори, асоційовані з позитивними операторами у банахових просторах і встановлено їх інтерполяційні властивості (теореми 3.4.1, 3.4.2). Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм відповідних апроксимаційних просторів (теореми 3.4.3, 3.4.4), а також доведено теорему, що характеризує спектральні апроксимації для оператора з точковим спектром (теорема 3.4.5).

Четвертий розділ присвячено опису функціональних просторів цілих векторів експоненціального типу, асоційованих з еліптичними операторами та доведенню відповідних нерівностей типу Бернштейна і Джексона з точними оцінками найкращих наближень кореневими функціями таких операторів у різних просторах Лебега.

Доведено, що у випадку непорожньої резольвентної множини регулярно еліптичного оператора його простір цілих векторів експоненціального типу співпадає з підпростором цілих функцій експоненціального типу, звуження яких на обмежену область Ω класу C^∞ належить простору $L_q(\Omega)$ (теорема 4.1.2). Аналогічний результат для компактних многовидів класу C^∞ отримано в теоремі 4.1.4.

Отримано нові ознаки повноти множини кореневих векторів регулярно еліптичного оператора в просторах $L_q(\Omega)$ ($1 < q < \infty$) (теореми 4.2.1-4.2.3).

Описано простори цілих векторів експоненціального типу вироджених еліптичних диференціальних операторів, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності) (теоре-

ма 4.3.1), звичайних вироджених еліптичних диференціальних операторів в обмеженому інтервалі (теорема 4.3.2) та вироджених еліптичних диференціальних операторів з частинними похідними в обмежених областях з нескінченно гладкою границею (теореми 4.3.3-4.3.5). Встановлено інтерполяційні властивості просторів цілих векторів експоненціального типу, асоційованих з даними еліптичними операторами.

Описано апроксимаційні простори, асоційовані з регулярними еліптичними диференціальними операторами в обмежених областях Ω і на компактних многовидах класу C^∞ , виродженими еліптичними диференціальними операторами, що характеризуються сильним виродженням коефіцієнтів поблизу границі (і на нескінченності), узагальненими диференціальними операторами Лежандра. Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазінорм таких апроксимаційних просторів з точними значеннями констант, що характеризують оцінки найкращих наближень функцій просторів Лебега кореневими функціями відповідних операторів (теореми 4.5.2, 4.5.4, 4.5.5, 4.5.7).

П'ятий розділ присвячений побудові теорії тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з наборами замкнених операторів, а також доведенню нерівностей типу Бернштейна і Джексона з точними оцінками найкращих наближень кореневими функціями таких операторів у різних функціональних просторах.

Описано проєктивні тензорні добутки просторів цілих векторів експоненціального типу для скінченних наборів замкнених операторів, що діють у банахових просторах, та побудовано спектральні розклади для операторів з точковим спектром (теорема 5.1.5). Встановлено інтерполяційні властивості вказаних проєктивних тензорних добутків (теореми 5.2.1, 5.2.2).

Доведено інтерполяційні теореми для проєктивних тензорних добутків векторів експоненціального типу замкнених операторів на областях визначення їх цілих степенів (теореми 5.2.3, 5.2.4).

Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона, які оцінюють відстань від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів цілих векторів експоненціального типу (теорема 5.3.2). Аналогічні нерівності доведено для проєктивних тензорних добутків векторів експоненціального типу замкнених операторів на областях визначення їх цілих степенів (теорема 5.3.4).

Визначено тензорні добутки апроксимаційних просторів типу Бесова на областях визначення комплексних степенів позитивних операторів та доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона, які оцінюють відстань

від заданого елемента тензорного добутку банахових просторів, що є областями визначення комплексних степенів позитивних операторів, до підпростору, що визначається тензорним добутком просторів векторів експоненціального типу (теорема 5.4.2).

Доведено нерівності типу Бернштейна і Джексона в термінах квазі-норм тензорних добутків апроксимаційних просторів, асоційованих з регулярними еліптичними диференціальними операторами в обмежених областях класу C^∞ і на компактних многовидах, що мають форму границі обмеженої області класу C^∞ , а також узагальненими диференціальними операторами Лежандра.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів. Усі одержані в дисертаційній роботі результати є новими, достовірними і строго обґрунтованими, що засвідчено наявністю чітких, повних і правильних доведень представлених у роботі тверджень.

Апробація результатів і публікації. Результати дисертації у повній мірі опубліковані у провідних наукових журналах України та інших країн. 29 статей автора повністю відповідають вимогам щодо публікацій результатів дисертаційної роботи у фахових виданнях з фізико-математичних наук, 12 з них опубліковано у виданнях, проіндексованих у наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на численних наукових конференціях та фахових семінарах.

Автореферат повністю відображає зміст дисертації.

Практичне значення результатів дисертації. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати мають перспективи подальшого застосування в теорії операторів, теорії наближень функцій, а також можуть бути використані при розв'язанні прикладних задач спектральної теорії диференціальних операторів чи як методи аналізу сигналів і розпізнавання образів.

Зауваження. До дисертаційної роботи є такі зауваження і побажання:

1. Для покращення сприйняття тексту дисертаційної роботи доцільно було б сформулювати перелік умовних позначень.
2. Доведення теорем 2.2.1 і 3.4.1 подібні, а тому доведення другої з них досить було навести фрагментарно.
3. У дисертації використовується поняття проективної та індуктивної локально опуклих топологій, просторів типу (DF), в зв'язку з чим слід було б уточнити суть даних понять.
4. У подальших дослідженнях доцільно розглянути різні топології на

тензорних добутках просторів цілих векторів експоненціального типу і розвинути відповідну теорію апроксимаційних просторів.

5. У роботі є незначна кількість друкарських помилок.

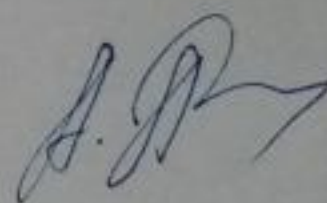
Вказані вище зауваження не є суттєвими і не впливають на загальну високу оцінку дисертаційної роботи.

Висновки. Вважаю, що дисертаційна робота “Апроксимаційні простори, асоційовані з цілими векторами експоненціального типу” є завершеною науковою працею, що містить нові, важливі наукові результати, і задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12-14 “Порядку присудження наукових ступенів”, затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (із змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановами КМ № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.07.2016 р., № 943 від 20.11.2019 р.), які стосуються докторських дисертацій, а її автор, Дмитришин Мар’ян Іванович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

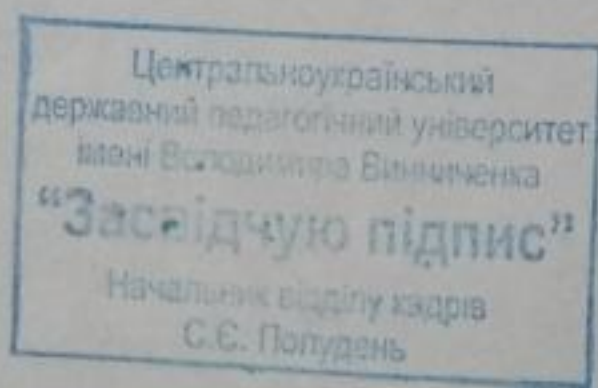
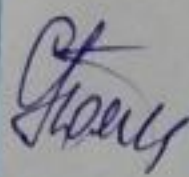
Офіційний опонент

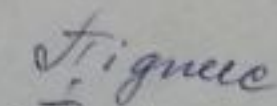
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри прикладної математики,
статистики та економіки

Центральноукраїнського державного
педагогічного університету
імені Володимира Винниченка



А. М. Плічко



Плічка А. М.

Вчений

секретар



С. В. Давидович