

Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу **Бандури Андрія Івановича**
"Властивості класів голоморфних функцій обмеженого індексу", подану на
здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю
01.01.01—математичний аналіз

1. Актуальність теми дослідження.

Дисертаційне дослідження присвячено голоморфним функціям обмеженого індексу. А саме, побудові методів дослідження голоморфних функцій багатьох змінних в канонічних областях $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, таких, як одинична куля та полікруг.

Поняття цілої функції обмеженого індексу виникло на початку 60-х років минулого століття в працях Дж. Макдонела та Б. Лепсона. Подальший розвиток цієї тематики відбувся в працях А. К. Босе, С. М. Шаха, Г. Х. Фріке, У. Хеймана, та ін. і в працях українських математиків А. А. Гольдберга, М. М. Шеремети, О. Б. Скасківа, М. В. Заболоцького, І. Е. Чижикова та їх учнів.

Цілі функції утворюють одну з найкрасивіших гілок сучасної математики. Вона включає у себе різноманітні аспекти з багатьох розділів математики від аналізу, алгебри, диференціальних рівнянь і аж до логіки. З другого боку теорія цілих функцій проникає у ці розділи, збагачуючи їх тонкими результатами і методами. Так, зокрема, поняття функції обмеженого індексу природно виникає в лінійних диференціальних рівняннях, а саме, як показав С. М. Шах, ціла трансцендентна функція, що є розв'язком л.д.р. порядку $n \geq 1$ зі сталими коефіцієнтами має обмежений індекс. Однак, як показали С. М. Шах і У. Хейман, ціла функція обмеженого індексу є функцією експоненціального типу. Тому при дослідженні цілих розв'язків інших лінійних диференціальних рівнянь, які не завжди вдається проінтегрувати, виникає потреба виокремлення іншої характеристичної властивості цілої функції, подібної до обмеженості індексу. Так з'явилися різноманітні узагальнення поняття функцій обмеженого індексу.

Теорія цілих функцій багатьох змінних є відносно молодого гілкою сучасної теорії функцій. Як відомо, вона не успадковує всі досягнення теорії функцій однієї змінної. Більше того, "інтуїтивне" перенесення того чи іншого одновимірного поняття на багатовимірний випадок не є однозначним. Це, зокрема, пов'язано з тим, що збіжність кратних рядів, використання яких лежить в основі багатьох понять, суттєво залежить від способу згрупування їх членів. Тому будь-яке нове нетривіальне поширення (розповсюдження) одновимірного поняття завжди видається цікавою і важливою задачею.

На підтвердження актуальності теми дисертаційного дослідження також зазначимо, що вивчення голоморфних функцій обмеженого індексу є цікавим і для теорії наближень. Підтвердимо це такими міркуваннями.

Добре відомо, що кожна ціла функція $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ може бути відновлена за інформацією про значення всіх своїх похідних $F^{(k)}(z)$ в деякій точці z комплексної

площини $\mathbb{C}$ за формулою

$$F(z+t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z)}{k!} t^k \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

Оскільки ряд в правій частині цієї рівності збігається абсолютно у всій комплексній площині при кожному фіксованому z , то модулі його коефіцієнтів $|\frac{F^{(k)}(z)}{k!}|$ прямують до нуля при $k \rightarrow \infty$. Отже, існує принаймні одне ціле невід'ємне число n таке, що

$$\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!} = \max \left\{ \frac{|F^{(k)}(z)|}{k!} : k = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Нехай $n(F, z)$ – найменше таке число. Функція F називається функцією обмеженого індексу, якщо

$$N(F) := \sup\{n(F, z) : z \in \mathbb{C}\} < \infty.$$

Нехай $E_n(F)_{z,\rho} := \inf_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \max_{\zeta \in \mathbb{D}(z,\rho)} |F(\zeta) - P(\zeta)|$ – найкраще рівномірне наближення функції F в замкненому крузі $\mathbb{D}(z, \rho) := \{t \in \mathbb{C} : |z+t| \leq \rho\}$ алгебраїчними многочленами степеня $\leq n-1$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді для будь-якої цілої функції F обмеженого індексу справджується нерівність

$$\sup \left\{ \frac{E_n(F)_{z,\rho}}{\max_{0 \leq k \leq N(F)} \left| \frac{F^{(k)}(z)}{k!} \right|} : z \in \mathbb{C} \right\} \leq \frac{\rho^n}{1-\rho} \quad \forall n \geq N(F), \quad 0 < \rho < 1.$$

Ця елементарна оцінка вказує (підказує) на можливість описання цілих трансцендентних функцій обмеженого індексу в термінах величин найкращих рівномірних на площині $\mathbb{C}$ (тобто на будь-яких компактах в $\mathbb{C}$) многочленних наближень. Задача про таке описання в багатовимірному (як і в одновимірному) випадку, а також її узагальнення з використанням поняття обмеженості L -індексу становить значний інтерес для теорії наближень і залишається нерозв'язаною на даний час. Розв'язок цієї задачі стане поряд з результатами С. Н. Бернштейна, Дж. Уолша, І. І. Ібрагімова, С. М. Шаха, Р. Варги, А. Редді, А. В. Батирьова, С. К. Балашова, С. Б. Вакарчука та ін. про швидкість росту цілої функції залежно від швидкості її найкращого многочленного наближення.

З огляду на викладене вище, вважаю тему дисертаційного дослідження актуальною.

2. Зміст роботи та наукові результати.

Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, вступу, 7 розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 297 найменувань. Повний обсяг роботи становить 352 сторінки.

Основний зміст роботи становлять сім розділів.

Перший розділ присвячено огляду літератури та основних результатів дисертації. Матеріал у ньому є дуже об'ємним, інформативним і чітко систематизованим.

У другому розділі запроваджено поняття голоморфної в одиничній кулі $B^n := \{z \in \mathbb{C}^n : \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} < 1\}$ функції обмеженого L -індексу за напрямком. Це поняття є природним узагальненням (поширенням) поняття функції обмеженого L -індексу голоморфної функції однієї змінної. Суть запропонованого у дисертації підходу полягає у використанні зріз-функції та перенесені за її допомогою відповідних "одновимірних" понять та означень на багатовимірний випадок. Коротко цю ідею можна проілюструвати так.

Нехай функція F є голоморфною в $\mathbb{B}^n$. Зафіксуємо $z \in \mathbb{B}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ і розглянемо функцію однієї змінної

$$g_z(t) := F(z + t\mathbf{b}),$$

визначену в області $S_z := \{t \in \mathbb{C} : z + t\mathbf{b} \in \mathbb{B}^n\}$.

Зрозуміло, що функція g_z є голоморфною в області $S_z \cap \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ і тому в цій області зображується у вигляді суми абсолютно збіжного степеневого ряду

$$g_z(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g_z^{(m)}(0)}{m!} t^m = \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k_1 + \dots + k_n = m} \frac{\partial^m F(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} \frac{b_1^{k_1} \dots b_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!} \right)}_{=: \partial_{\mathbf{b}}^m F(z)/m!} t^m.$$

На основі цієї конструкції цілком природно розглянути клас функцій, які мають ту властивість, що

$$\left| \frac{\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)}{k! L^k(z)} \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)}{m! L^m(z)} \right| : 0 \leq m \leq m_0 \right\} \quad \forall z \in \mathbb{B}^n, k = 0, 1, \dots$$

Голоморфні в $\mathbb{B}^n$ функції з такою властивістю названо функціями обмеженого L -індексу за напрямком $\mathbf{b}$.

У підрозділі 2.1 встановлено низку властивостей функцій обмеженого L -індексу за напрямком. Основним результатом у цьому підрозділі є теорема 2.1.

У підрозділі 2.3 доведено теорему 2.2, яка дає критерій обмеженості L -індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ в термінах зріз-функції похідних за напрямком $\mathbf{b}$.

У підрозділі 2.4 за допомогою теореми 2.2 одержано критерій обмеженості L -індексу за напрямком в термінах максимумів і мінімумів модулів зріз-функцій на концентричних колах, а також одержано критерій, який є аналогом теореми Хеймана в одновимірному випадку.

У підрозділі 2.5 одержано критерій обмеженості L -індексу за напрямком в термінах логарифмічної похідної за напрямком.

Підрозділ 2.6 присвячено дослідженню розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними на предмет обмеженості їх L -індексу за напрямком.

У підрозділі 2.7 одержано оцінки росту зріз-функцій по концентричних колах для функцій обмеженого L -індексу в кулі $\mathbb{B}^n$.

У третьому і четвертому розділах дисертаційної роботи запроваджено поняття голоморфної в одиничній кулі $\mathbb{B}^n$ і відповідно в полікурузі $\mathbb{D}^n$ функції обмеженого L -індексу за сукупністю змінних, де $\mathbf{L} : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ деяка неперервна вектор-функція. Коротко ідею, реалізовану в розділі 3 так само, як і в розділі 4, можна описати так.

Функція F , голоморфна в кулі $\mathbb{B}^n$ розкладається в околі точки $z \in \mathbb{B}^n$ в кратний степеневий ряд

$$F(z+t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \left(\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} F(z) \right) t^k, \quad z+t \in \mathbb{B}^n.$$

Оскільки кратний ряд збігається абсолютно відносно t , то модулі його коефіцієнтів прямують до нуля при незалежному один від одного зростанні компонент мультиіндексу k , тобто в сенсі Прингсгейма. У зв'язку з цим природно розглянути функції, які мають ту властивість, що існує ціле невід'ємне число n_0 таке, що

$$\frac{1}{l_1^{j_1}(z) \dots l_n^{j_n}(z)} \left| \frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}} F(z) \right| \leq \\ \leq \max \left\{ \frac{1}{l_1^{k_1}(z) \dots l_n^{k_n}(z)} \left| \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} F(z) \right| : k \in \mathbb{Z}_+^n, \sum_{l=1}^n k_l \leq n_0 \right\} \quad \forall z \in \mathbb{B}^n, J \in \mathbb{Z}_+^n,$$

де функції $l_1, \dots, l_n$ визначені належним чином в $\mathbb{B}^n$. Такі функції F названо голоморфними в кулі $\mathbb{B}^n$ функціями з обмеженим $\mathbf{L}$ -індексом за сукупністю змінних. Так само означаються функції обмеженого $\mathbf{L}$ -індексу за сукупністю змінних, голоморфні в полікурузі $\mathbb{D}^n$.

Результати розділів 3 і 4 є цілком аналогічними до результатів розділу 2.

П'ятий розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню цілих функцій обмеженого L -індексу за напрямком. Ці дослідження мають важливе значення, оскільки передбачається, що за аналогією з теоремою Шеремети-Хеймана в одновимірному випадку, ціла функція багатьох змінних має обмежений L -розподіл значень за напрямком тоді і тільки тоді, коли її похідна за напрямком є цілою функцією обмеженого L -індексу за цим самим напрямком. Таке твердження повністю доведене в підрозділі 5.1.

Добре відомо, що існують цілі функції однієї змінної, які є обмеженими вздовж будь-якого променя, що виходить з початку координат. Подібно до цього дивного на перший погляд факту (з огляду на теорему Ліувілля), автор дисертації знайшов достатні умови існування цілих функцій F двох змінних, для яких зріз-функції $g_z(t) = F(z+tb)$ при кожному $z \in \mathbb{C}^2$ мають обмежений індекс, але самі функції F мають необмежений індекс за будь-яким напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

В ході дослідження цих питань автором було знайдено низку різних умов (теореми 5.4, 5.5, 5.6), які гарантують обмеженість L -індексу за напрямком цілої функції багатьох змінних.

Також у розділі 5 дано розв'язки важливих задач, поставлених свого часу професорами А. А. Кондратюком, М. М. Шереметою і С. Ю. Фаворовим.

У шостому розділі дисертації вивчаються цілі функції багатьох змінних обмеженого $\mathbf{L}$ -індексу за сукупністю змінних. Основним результатом є теорема 6.12 про зростання цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$ -індексу за сукупністю змінних у випадку, коли функція $\mathbf{L}$ є радіальною, тобто залежить тільки від модулів аргументів. Цей результат вирішує давнє питання, поставлене У. Дж. Пуджем і С. М. Шахом.

Розділ 7 присвячено дослідженню голоморфних функцій однієї змінної на предмет обмеженості їх l -індексу та $l - M$ -індексу композицій цілої функції з аналітичною. Зокрема, доведено достатність умов однієї гіпотези М. М. Шеремети про обмеженість l -індексу в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ композиції цілої функції з функцією

$$g(z) = \sum_{k=0}^p \frac{q_{p+1-k}}{(1-z)^p}.$$

У підрозділі 7.4 досліджуються цілі розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння

$$\sum_{k=0}^p g_p(z) f^{(p-k)}(z) = 0.$$

Основним результатом цього підрозділу є теорема 7.5 про оцінку росту цілого розв'язку такого рівняння.

3. Обґрунтованість, достовірність і новизна наукових результатів.

Дисертаційне дослідження А. І. Бандури проведене на високому науковому рівні. Результати роботи є новими. Усі математичні твердження дисертаційної роботи, які містяться в теоремах і лемах є строго обґрунтованими. Їх достовірність не викликає сумнівів. Викладення положень дисертації виконано логічно і послідовно з дотриманням усіх стандартів наукової літератури.

4. Публікації та апробація результатів.

Результати дисертації опубліковано у 60 роботах, 31 з яких (у тому числі 13 статей) опубліковано без співавторів, у двох монографіях, а 11 статей опубліковано в українських та закордонних фахових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз даних. Результати дисертації доповідалися на 23 міжнародних наукових конференціях та численних наукових семінарах у провідних наукових центрах України та Франції.

Автореферат повністю відповідає змісту дисертації.

5. Практичне значення результатів.

Дисертаційна робота А. І. Бандури є цілісною і завершеною науковою працею, в якій одержано результати теоретичного характеру. Розроблені у ній методи можуть знайти подальше застосування в різних розділах сучасного математичного аналізу.

6. Зауваження

Дисертаційну роботу написано на належному науковому рівні. У цілому до наукової складової тексту дисертації зауважень немає. Проте є незначне зауваження такого змісту. Назва дисертації звучить так "Властивості класів *голоморфних* функцій обмеженого індексу". Тут наголос ставиться на слово "голоморфних". Однак у всіх твердженнях натомість вживається словосполучення зі словом "аналітична". Так в авторефераті 37 разів зустрічається слово "аналітична" і 14 разів слово "голоморфна". Звісно, голоморфність та аналітичність функції є рівносильними поняттями в рамках дисертаційної роботи і це не викликає ніяких непорозумінь.

Інших серйозних зауважень до оформлення дисертації немає. Ті нечисленні друкарські помилки і описки не впливають на позитивне сприйняття дисертації і не зменшують її наукового рівня.

7. Висновки.

Дисертаційне дослідження *"Властивості класів голоморфних функцій обмеженого індексу"* є завершеним науковим дослідженням в актуальних напрямках сучасної теорії голоморфних функцій. В ній розроблено методику дослідження голоморфних функцій багатьох змінних обмеженого **L**-індексу та розв'язано низку важливих наукових проблем, які мають світове значення.

Одержані в дисертації результати мають вагомое теоретичне значення. Вони напевне знайдуть застосування у дослідженнях класів голоморфних функцій багатьох змінних, розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними та в інших розділах математичного аналізу і математичної фізики.

Наукові положення дисертаційного дослідження повною мірою апробовані на міжнародних наукових конференціях і наукових семінарах.

Наведенні зауваження не зменшують наукового рівня дисертації.

На основі вивчення рукопису дисертації, автореферату та статей, опублікованих за темою дисертації, вважаю, що обрана тема дослідження є актуальною, наукові положення є новими, достовірними і строго математично обґрунтованими. Дисертація А. І. Бандури *"Властивості класів голоморфних функцій обмеженого індексу"*, подана на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз, відповідає вимогам щодо змісту докторських дисертацій *"Порядку присудження наукових ступенів"*, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24.07.2013, результати дослідження відповідають вимогам до наукового рівня результатів докторської дисертації, а її автор Бандура Андрій Іванович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
провідний науковий співробітник
відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України

