

ВІДГУК ОФІЦІЙНОГО ОПОНЕНТА

на дисертаційну роботу Бандури Андрія Івановича
"Властивості класів голоморфних функцій обмеженого індексу", подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз.

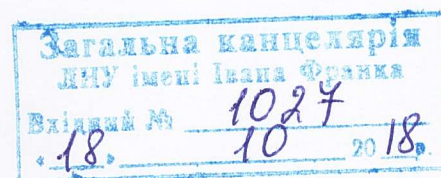
Актуальність роботи. Великі класи диференціальних рівнянь мають своїми розв'язками аналітичні функції, які в тому чи іншому сенсі регулярні. Прикладом таких функцій є саме функції обмеженого індексу, яким присвячена робота здобувача. Для аналітичних функцій це поняття дуже добре відоме,

Зокрема, У. Хейман довів низку найважливіших теорем про цілі функції обмеженого індексу та показав важливість цього класу для вивчення розв'язків диференціальних рівнянь. Він також довів, що цілі функції завжди мають експоненціальний тип. Для розповсюдження результатів про цілі функції обмеженого індексу на більш широкий клас аналітичних функцій було введено поняття функцій так званого обмеженого L -індексу.

На теперешній час властивості аналітичних функцій обмеженого L -індексу більш-менш досліджені, насамперед математиками Львівської математичної школи. Але природно виникає задача досліджень властивостей рішень диференціальних рівнянь з частинними похідними та відповідних властивостей функцій багатьох змінних. Відзначимо, що поняття цілої функції обмеженого L -індексу за сукупністю змінних було введено та розглянуто ще у 1993 році М.М.Шереметом.

Робота здобувача присвячена вивченню різних властивостей класу функцій, що мають обмежений L -індекс, а також класу функцій обмеженого L -індексу за напрямком, що був введений здобувачем ще у кандидатській дисертації. Відзначимо, що здобувач розглядає не тільки цілі функції від багатьох змінних, але і аналітичні функції у деяких областях в $\mathbb{C}^n$. Ці результати також застосовуються здобувачем для вивчення властивостей розв'язків диференціальних рівнянь у відповідних областях.

Опис результатів роботи. Введене раніше здобувачем поняття функцій обмеженого L -індексу за напрямком в $\mathbb{C}^n$ виявилось дуже перспективним. Автор, продовжуючи дослідження таких функцій, що було започатковано у його кандидатській дисертації, наводить низку нових теорем. Використовуючи нові методи, він в критеріях обмеженості L -індексу заміняє умови "для усіх значень параметру" на "для хоч би одного значення". Він доводить, що обмежений L -розподіл значень цілої функції $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, за напрямком b еквівалентний L -індексу за тим же напрямком функції $\partial_b F$. Здобувач також знаходить зв'язки між обмеженістю L -індексу за різними напрямками, достатні умови для обмеженості L -індексу за напрямком суми функцій обмеженого L -індексу, критерії обмеженості L -індексу через поведінку максимуму модуля функції на відповідних колах, різноманітні теореми про властивості функцій обмеженого L -індексу за напрямком. Здобувач також будує приклади функцій, що мають обмежений індекс на зрізках та необмежений



індекс у кожному напрямку, функції, що аналітичні на кожній зрізці та не аналітичні в $\mathbb{C}^n$, для яких не мають місце властивості функцій обмеженого L -індексу. Одержані результати автор використовує для вивчення поведінки деяких диференціальних рівнянь, зокрема, знаходить достатні умови обмеженості L -індексу за напрямком для цілих розв'язків рівняння $w' = f(z, w)$.

Але усі ці результати з'являються лише в середині дисертації. Спочатку автор переробляє своє визначення L -індексу за напрямком таким чином, щоб воно дозволяло вивчати регулярне зростання функцій, аналітичних у кулі в $\mathbb{C}^n$. Він встановлює зв'язок між поведінкою аналітичної функції на зрізках вигляду $z + tb, t \in \mathbb{C}$, та обмеженості L -індексу за напрямком b , зв'язує величини l -індексу на зрізках та у напрямку b , знаходить необхідні та достатні умови, що пов'язують обмеженість L -індексу з максимумом та мінімумом функції на колах, критерій обмеженості індексу через логарифмічну похідну та розподіл нулів на зрізках. Ці результати також використовуються для вивчення розв'язків диференціальних рівнянь у часткових похідних, а саме дослідження випадків, коли ці розв'язки мають обмежений L -індекс. Одержані результати дозволяють оцінити зростання таких розв'язків, а також зростання їх нульових множин.

Здобувач не обмежується вивченням поведінки аналітичних функцій у кулі за допомогою тільки L -індексу за напрямком. Він також вивчає функції обмеженого L -індексу за сукупністю змінних – поняття, що виникло раніше у роботах М.М.Шеремети. Але він теж модернізує його, замість функції $L(z) = (l_1(|z|), \dots, l_n(|z|))$ розглядає функцію $L(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$. Він пов'язує це поняття з поняттям обмеженості L -індексу за напрямком. Крім того, для функцій в одиничній кулі він одержує такі результати:

- аналог теореми Хеймана (критерій обмеженості L -індексу за сукупністю змінних через оцінку зростання тільки скінченної кількості похідних),

- знайдено умови обмеженості L -індексу за сукупністю змінних через поведінку функції на кістяку полікруга, та одержані оцінки поведінки функції на сферах радіусів менших за 1,

- одержано достатні умови обмеженості L -індексу за сукупністю змінних через логарифмічну похідну та розподіл нульової множини,

- одержано достатні умови обмеженості L -індексу за сукупністю змінних для розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних у кулі.

Більшість з цих результатів здобувач переніс на аналітичні функції обмеженого L -індексу у полікрузі.

Здобувач також розглядає цілі функції обмеженого одержано L -індексу за сукупністю змінних. Хоча для таких функцій раніше було одержано багато результатів іншими авторами, здобувач і тут одержує нові цікаві результати. Саме, для функцій цього класу він доводить аналог теореми Хеймана, оцінює зростання на кістяку полікругів, доводить достатні

умови обмеженості L -індексу за сукупністю змінних через логарифмічну похідну, через максимум та мінімум функції на кістяку полікруга, одержано достатні умови обмеженості L -індексу за сукупністю змінних для цілих розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних в просторі $\mathbb{C}^n$, одержано достатні умови обмеженості L -індексу за сукупністю змінних для суми функцій, доведено, що для кожної цілої функції F з обмеженою кратністю нульових точок існує функція L така, що F є функція обмеженого L -індексу за сукупністю змінних.

Відзначимо, що більшість результатів у деякому сенсі є новими також для випадку функцій від однієї змінної, оскільки розглядаються функції l , що залежать не тільки від модуля змінної. Крім того, здобувач у останньому розділі доводить низку нових теорем про функції обмеженого l -індексу від однієї змінної: про обмеженість l -індексу для композиції функцій, про зв'язок з функціями цілком регулярного зростання, обмеженість l -індексу розв'язків диференціальних рівнянь з швидко зростаючими коефіцієнтами. Розглядаються також мероморфні функції, для яких водиться поняття обмеженого індексу.

Я вважаю, що одержаних автором результатів більш ніж вистачає на дисертацію.

Зауваження

1. Я був рецензентом для кількох робіт здобувача у різних журналах, зауваження, що я робив у рецензіях, здобувач урахував ще тоді. Наприклад, я тоді запропонував більш просте означення (3.3) класу $Q(B^n)$ замість (3.4). Здобувач як у статтях, так і у дисертації врахував моє зауваження. Але мені здається, що використання означення (3.3) в більшості доведень також приведе до деякого скорочення викладок.

2. В вступі здобувач багато говорить про функції обмеженого l -індекса, але тільки на стор.20 пояснює, чим вони відрізняється від звичайних функцій обмеженого індекса. Правильно було би змінити порядок.

3. В лемі 3.1 недостатньо умов на $\partial l / \partial z$, потрібно також умови на $\partial l / \partial \bar{z}$.

4. Те ж зауваження у лемі 6.2.

5. Вважаю, що було би правильно випередити більшість викладок поясненнями, що конкретно робиться. Наприклад, в твердженні 6.1 спочатку доводиться, що $cS_m(z^0, R) \leq S_m^*(z^0, R) \leq CS_m(z^0, R)$ з незалежними від m сталими C, c , дали доводиться теж саме для зв'язку між $S_{m-1}^*(z^0, R)$ та $S_m^*(z^0, R)$.

6. На стор.62 в розділі 1 є посилання на формулу (7.3) з розділу 7, але ця формула насправді є трьома рядками вище!

Описки

1. В умові твердження 6.1 повинно бути $\mathbb{D}^n[\dots]$ замість $E[\dots]$.

2. В формулі попереду (6.3) повинно бути $\lambda_{1,k}$ замість $\lambda_{j,k}$.

3. На стор.37 у теоремі 2.3 повинно бути z^0 замість z_0 .

4. В теоремі 3.4 p є число, а не номер.

5. В гіпотезі 7.2 функція F має обмежений l -індекс в $\mathbb{D}$ чи в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

6. В теоремах 7.1 та 7.2. краще писати одночасно $l(|z|)$ або $l(r)$.

7. В висновках до розділів 4, 5, 6 треба правильно нумерувати розділи: наприклад, на стор.168 треба слова "шостого розділу" замінити на "четвертого розділу".

Ці неточності не впливають на мою високу оцінку дисертації.

Заклучна частина і висновки. З опису результатів дисертації випливає, що майже всі вони одержані А.Бандурою для об'єктів, що активно вивчалися раніше іншими авторами, але при цьому дисертант не займається уточненням чужих результатів, а знаходить нові ефекти або поширює відомі раніше на новий чи істотно ширший клас функцій, використовуючи для цього нові методи і конструкції. На мій погляд, це є добрим показником якості роботи.

Всі доведення, висновки і рекомендації є обґрунтованими. Більшість результатів носить критеріальний характер, мають завершений вигляд. Вони доповідалися на 29 наукових конференціях, представлені в 29 українських фахових журналах, 11 надруковано в українських та закордонних виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus). Таким чином, достовірність результатів дисертації не викликає сумнівів.

Дисертація вносить вагомий вклад в аналітичну теорію диференціальних рівнянь та теорію аналітичних функцій, і буде корисною в тих розділах математики, які є дотичними до цих розділів математики. Результати дисертації є цікавими для спеціалістів, що працюють у Львівському, Харківському, Київському університетах, Київському Інституті математики. Автореферат повністю та правильно відображає зміст дисертації.

Вважаю, що за обсягом та науковим рівнем проведених наукових досліджень, їх актуальністю та значимістю, науковою новизною та завершеністю отриманих результатів, кількістю публікацій дисертаційна робота А.Бандури повністю задовольняє усім вимогам "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету міністрів України №567 від 24.07.2013) щодо дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук, а її автор заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри фундаментальної математики
Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна

2018

 С. Ю. Фаворов

Підпис проф. С. Ю. Фаворова засвідчую
Вчений секретар Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна

 Н. А. Вінникова

