

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Бандури Андрія Івановича
„Властивості класів голоморфних функцій обмеженого індексу“,
подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз.

Актуальність дослідження та його мета. Методи комплексного аналізу вже давно посіли важливе місце в теорії звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Їхній симбіоз спричинив виникнення такого розділу математики як аналітична теорія диференціальних рівнянь, основним завданням якої є дослідження властивостей аналітичних розв'язків цих рівнянь, а також їхніх систем. Однією з найважливіших її задач є оцінка зростання аналітичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь у комплексній площині чи у крузі, також аналітичних у кулі чи у всьому C^n розв'язків рівнянь з частинними похідними або їхніх систем. Їй присвячено чимало праць, які використовують ідеї методу Вімана – Валірона, що, у свою чергу, базується на описі локального поведіння похідних функції через центральний індекс її степеневого розвинення. У цьому зв'язку варто також згадати прізвища В. Заксера, Т. Кеварі, А. Макінтайра, В. Хеймана, Ш. Стреліца, М. Шеремети, О. Скасківа, В. Бергвайлера, П. Фентона, І. Чижикова. Щоправда, класична теорія Вімана – Валірона переважно стосується властивостей цілих розв'язків. Якщо ж спробувати досліджувати аналітичні в крузі функції, які є розв'язками диференціальних рівнянь чи систем диференціальних рівнянь, то картина в загальному стає істотно складнішою, бо умови, за яких виконуються відповідні співвідношення з теорії Вімана – Валірона стають не такими прозорими, як у випадку цілих функцій. Зрозуміло, що перехід у C^n та у кратно-кругові області ще більше ускладнює таку задачу.

В той же час зручні критерії для дослідження властивостей аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь пропонує теорія аналітичних функцій обмеженого індексу. Її зачинателями є Б. Лепсон (1968) та Дж. Макдоннел (1957), але найбільший вклад у вивчення цілих функцій обмеженого індексу внесли С. Шах, Г. Фріке, Р. Рой, В. Хейман. Згодом такі львівські математики, як М. М. Шеремета, О. Б. Скасків, І. Е. Чижиков, А. Д. Кузик, В. О. Кушнір, М. Т. Бордуляк, Ю. С. Трухан займалися дослідження властивостей аналітичних функцій обмеженого 1-індексу. Таке узагальнення дозволило вийти за межі класу функцій експоненційного типу, до якого належить кожна ціла функція обмеженого індексу. Варто зазначити, що аналітичні функції обмеженого 1-індексу мають у певному сенсі обмежений рівномірний розподіл значень. Функції з таких класів також допускають певні оцінки швидкості їхнього зростання. Крім того, відомо певні прозорі умови на аналітичні коефіцієнти

лінійних диференціальних рівнянь, за яких кожний аналітичний розв'язок є функцією обмеженого l -індексу, а це у свою чергу означає доведення гіпотези В. Хеймана про максимально можливе зростання розв'язків для цього класу рівнянь. Зрозуміло, що такі дослідження важливі не лише для C , а й для C^n . Водночас багатовимірний комплексний аналіз має дві основні групи методів дослідження властивостей аналітичних функцій від декількох змінних. Перша група вивчає аналітичну функцію за кожною змінною i на основі цього встановлює її властивості. Це призводить до поняття обмеженого L -індексу за сукупністю змінних. Друга група заснована на вивченні властивостей так званий зрізок функції, тобто аналітичної функції від однієї змінної $g(t)=F(a+bt)$, що отримуються звуженням аналітичної функції F на довільні комплексні прямі $\{z=a+bt: t \in C\}$, $a, b \in C^n$. Внаслідок природно виникає поняття функції обмеженого L -індексу за напрямком.

Беручи це все до уваги, дослідження таких класів як класи цілих функцій обмеженого L -індексу за напрямком, цілих функцій обмеженого L -індексу за сукупністю змінних, аналітичних в кулі функцій обмеженого L -індексу за напрямком, аналітичних в кулі функцій обмеженого L -індексу за сукупністю змінних, аналітичних в полікрузі функцій обмеженого L -індексу за сукупністю змінних та мероморфних функцій від однієї змінної, проведені у дисертаційній роботі, є актуальними.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Усі результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими. У дисертації розв'язано ряд актуальних задач з аналітичної теорії диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними та їхніх систем, а також теорії цілих функцій від однієї та декількох змінних, аналітичних в одиничній кулі та у полікрузі функцій. Зокрема, у дисертації вперше узагальнено поняття обмеженості L -індексу за напрямком та обмеженості L -індексу за сукупністю змінних на клас аналітичних в одиничній кулі функцій, встановлено два певні аналоги логарифмічного критерію у вигляді достатніх умов та оцінки максимуму модуля через мінімум модуля для цілих та аналітичних в одиничній кулі функцій обмеженого L -індексу за сукупністю змінних, знайдено оцінки зростання цілих та аналітичних в одиничній кулі розв'язків деяких лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та їхніх систем, встановлена точність цих оцінок у загальному випадку, запропоновано підхід до розгляду додатних неперервних вектор-функцій L загальнішого вигляду, що дозволило досліджувати на обмеженість L -індексу за сукупністю змінних довільні цілі функції від декількох змінних з обмеженою кратністю нульових точок, доведено неможливість послаблення в загальному випадку умови „ F – голоморфна у C^n “ на „ F – голоморфна на усіх зрізках вигляду z_0+tb “ у теорії цілих функцій

обмеженого L-індексу за напрямком, доведено гіпотезу О. Б. Скасківа про можливість послаблення достатніх умов обмеженості індексу за напрямком шляхом заміни квантора загальності на квантор існування, причому отримані результати виявилися новими навіть в одновимірному випадку.

Обґрунтованість і правильність результатів дисертації. Всі формулювання математичних результатів дисертаційної роботи Бандури А. І. є правильними та новими. Їхні доведення строго обґрунтовані, а правильність міркувань та висновків не викликає сумнівів.

Зауваження. Дисертаційну роботу оформлено на належному науковому рівні. Тим не менш, у ній наявна певна кількість недоглядів та неточностей.

Перелік зауважень:

1) Позиція [26] у списку літератури – це також позиція [4] у списку публікацій, які додатково відображають результати дисертації в анотації. Так-от, здобувач не відніс цю публікацію до основних, тому йому не потрібно було ділити авторство теорем цієї праці в підрозділі *Особистий внесок здобувача*, як це зроблено у тексті дисертації.

2) У дисертації використовуються чотири ілюстрації до доведення теореми 6.4 на с. 262-264 для цілих функцій від декількох змінних. Також у доведенні теореми 3.16 на с. 152-154 зроблено посилання на ті ж самі рисунки. Але насправді, для того, щоб рисунок 1 можна було використати і у випадку аналітичних функцій в одиничній кулі потрібно написати, що радіус $(R+1)/L(z^0)$ на рисунку 1 для цілих функцій необхідно замінити на радіус $(\beta-R)/L(z^0)$ для аналітичних в одиничній кулі функцій.

3) Підписи до ілюстрацій неправильні. Замість Рисунок 1 має бути Рисунок 6.1 і т. д. (вставлено номер розділу).

4) С. 164¹ зайвий модуль перед «Потрібно вибрати».

5) С. 193⁴ зайва крапка після «за напрямком?».

6) С. 199₅ замість «таке. що» має бути «таке, що».

7) С. 200₁₇ замість «функцій Наразі» має бути «функцій. Наразі».

8) С. 263₁₋₂ замість «міра не менша ніж ліва частина» має бути «міра не менша, ніж ліва частина»

9) С. 324⁸ замість «Функція $g(z)$, побудована А. А. Гольдбергом задовольняє умову» має бути «Функція $g(z)$, побудована А. А. Гольдбергом, задовольняє умову».

10) С. 322₃ вираз $s = \max_{j \in \{0, \dots, n-1\}} \deg a_j(z)/j$ невизначений при $j=0$. Насправді там має бути $s = \max_{j \in \{0, \dots, n-1\}} \deg a_j(z)/(n-j)$

Звісно, перераховані неточності не чинять істотного впливу на сприйняття наукових положень дисертації та не викликають сумнівів у правильності основних математичних здобутків дисертанта.

Публікації та апробація результатів роботи. Результати дисертації опубліковано в 60 роботах, з них 31 (в тому числі 13 статей) — без співавторів, 29 — статей в українських та закордонних фахових виданнях із фізико-математичних наук, 11 — статей в українських та закордонних виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus), 29 — у збірниках тез наукових конференцій, 2 — монографії. Здобувач доповідав на численних міжнародних конференціях, в тому числі на „Computational Methods and Function Theory 2017“ (Люблін, Польща), XIX International conference on analytic functions and related topics (Жешув, Польща). Крім конференцій, результати дисертації доповідалися на семінарах у Ліллі (Франція), Львові, Києві, Харкові, Івано-Франківську, Житомирі, тобто пройшли відповідну апробацію.

Автореферат належним чином описує основні положення та зміст дисертаційної роботи. А результати сповна опубліковані у наукових виданнях.

Практичне значення результатів роботи. Дисертація має теоретичний характер, а отримані у ній результати істотно доповнюють аналітичну теорію диференціальних рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними. Запропонований здобувачем підхід до введення поняття обмеженості L -індексу за сукупністю змінних для цілих та аналітичних у кулі функцій дозволяє вивчати засобами теорії обмеженого індексу властивості відповідних функцій з обмеженою кратністю нульових точок. Вони, поза всяким сумнівом, будуть вагомим підґрунтям для подальших досліджень у цих розділах комплексного аналізу.

Висновки. У роботі суттєво доповнюється багатовимірний комплексний аналіз, а також аналітична теорія диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними та їхніх систем. Найвагомішим досягненням дисертанта є побудова теорії функцій обмеженого індексу для аналітичних в кулі функцій. Саме стосовно цього класу функцій дисертант став першопрохідцем, ввівши для них поняття обмеженого L -індексу за сукупністю змінних, обмеженого L -індексу за напрямком та отримавши цілий ряд критеріїв. Варто визначити, що знайдені критерії не є простим переспівом відомих одновимірних результатів, бо А. І. Бандура зумів послабити відповідні достатні умови обмеженості індексу шляхом заміни квантора загальності на квантор існування. Іншим знаковим результатом є отримані здобувачем два аналоги достатніх умов логарифмічного критерію для класів цілих та аналітичних в одиничній кулі функцій обмеженого L -індексу за сукупністю змінних. Відповідні одновимірні твердження дозволяють досліджувати нескінченні добутки та аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь через обмеження на поведінку логарифмічної похідної та розподіл нулів. Ним також розроблений новий підхід

у теорії обмеженого індексу, який полягає у вичерпанні кулями областей у багатовимірному комплексному просторі замість традиційних полікругів, що дозволило встановити зовсім нові властивості. Крім того, здобувач послабив достатні умови або уточнив нерівності в багатьох інших одновимірних твердженнях, які отримуються з його результатів як наслідки для цілих функцій від однієї змінної та функцій аналітичних в одиничному крузі. Це стосується, як зростання функцій обмеженого І-індексу, так і композиції функцій з цих класів, розміру виняткової множини у достатніх умовах логарифмічного критерію, загальніших умовах на поведінку функції І тощо.

Наведені вище зауваження не зменшують наукової цінності дисертації.

Все це дає підстави стверджувати, що дисертаційна робота А. І. Бандура є завершеним, виконаним на актуальну тематику науковим дослідженням з новим внеском у аналітичну теорію диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, а також у теорію різних класів голоморфних функцій: цілих функцій від однієї та декількох змінних, аналітичних в одиничній кулі функцій та аналітичних в полікрузі функцій. Відповідно, дисертація А. І. Бандури „Властивості класів голоморфних функцій обмеженого індексу“, подана на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз, відповідає вимогам „Порядку присудження наукових ступенів“, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 р., а її автор Бандура Андрій Іванович заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент,
професор, доктор фізико-математичних
професор кафедри економічної кібернетики та інформатики
Тернопільського національного
економічного університету



Підписав: *Д. І. Боднар*
Зав. загальним відділом: *Таранов Г. О.*

Д. І. Боднар