

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію **Добушовського Маркіяна Степановича**
“Асимптотичні властивості інтеграла Лапласа-Стільтьєса”,
подану на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Актуальність дослідження. У другій половині XIX століття у теорії функцій почав інтенсивно розвиватись новий напрям: дослідження асимптотичних властивостей аналітичних функцій у залежності від властивостей тейлорових коефіцієнтів їх розвинень. Потреба таких досліджень була викликана як внутрішніми потребами розвитку теорії, так і широким колом їх застосувань. Дослідження започатковані у роботах Е.Лаггера, Ж.Адамара, Е.Бореля, Е.Фабрі, істотно були доповнені новими ідеями та методами у роботах А.Вімана, Ж.Валірона, Д.Поя. Для рядів Діріхле $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{\sigma \lambda_n}$ з невід’ємними зростаючими до $+\infty$ показниками, що є безпосереднім узагальненням степеневих рядів, важливі результати отримали Ж.Рітт, С.Мандельброт, К.Наддан, А.Леонтьєв, В.Бойчук, А.Гайсин, М.Шеремета, Б.Винницький, О.Скасків та їх учні. Чимало праць львівських математиків присвячені власне дослідженню регулярного зростання основних характеристик рядів Діріхле у термінах функцій порівняння та багаточленних асимптотик. Крім вище згаданих, у цьому напрямку проводили дослідження також М.Заболоцький, П.Філевич, Я.Притула, С.Федияк, О.Сумик. Було знайдено умови на показники і коефіцієнти ряду Діріхле, за яких виконується $\Phi_1(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma) \leq \Phi_2(\sigma)$, $\ln \mu(\sigma) \sim \Phi(\sigma)$ чи $\ln \mu(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + (1 + o(1))\tau \Phi_2(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ для наперед заданих опуклих функцій Φ . Перед дисертантом стояло завдання отримати подібні результати для інтегралів Лапласа-Стільтьєса $I(\sigma) = \int_0^\infty f(t) e^{t\sigma} dF(t)$, де f – невід’ємна, а F – невід’ємна, неспадна, необмежена і неперервна справа на $[0, +\infty)$ функція, які є узагальненням рядів Діріхле.

Для цілої функції порядку ϱ і нижнього порядку λ , заданої лакунарним степеневим рядом зі степенями λ_n Дж. Уїттекер довів, що $\lambda \leq \varrho\beta$, де $\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln \lambda_n) / \ln \lambda_{n+1}$. П.В. Філевичу і М.М. Шереметі вдалось перенести цей результат на цілі ряди Діріхле скінченного R -порядку і абсолютно збіжні ряди логарифмічного порядку. Актуальним стало питання отримання аналогу нерівності Уїттекера для інтегралу Лапласа-Стільтьєса.

З огляду на сказане вище, задачі досліджені в дисертації є актуальними.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи. Усі результати отримані в дисертаційній роботі є новими. У роботі вперше для інтегралів Лапласа-Стільтьєса $I(\sigma) = \int_0^\infty f(t) e^{t\sigma} dF(t)$ з довільною абсцисою збіжності отримано оцінки зверху та знизу в залежності від асимптотичного поведіння f і F ; знайдено умови, за яких правильні двочленні асимптотичні нерівності та рівності між логарифмами інтегралу та максимуму його підінтегрального виразу; для інтегралів Лапласа-Стільтьєса отримано аналоги теореми Уїттекера про порядок і нижній порядок цілої функції, зображеної лакунарним степеневим рядом; показано, як можна отримати формулу для знаходження абсциси збіжності інтегралу Лапласа-Стільтьєса зведенням його до ряду Діріхле.

Усі основні результати дисертаційної роботи є науково обґрунтованими. Вони доповнюють відомі результати М.Шеремети, М.Заболоцького, П.Філевича, О.Сумик і можуть



бути використані в подальших дослідженнях Інституту НАН України, Київського, Львівського, Харківського, Прикарпатського та Дрогобицького університетів.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень. Усі формулювання основних результатів дисертаційної роботи Добушовського Маркіяна Степановича є правильними і новими. Вони доведені на сучасному математичному рівні і не виникає сумнівів щодо їхньої достовірності.

Зауваження. У дисертації присутня незначна кількість описок і неточностей:

- с.3₂ містить посилання на формулу (0.2), яка знаходиться на с.19;
- с.3¹⁵⁻¹⁸ допущено стилістичну помилку, оскільки в одному реченні тричі вжито фразу “регулярної зміни f відносно F ”;
- у декількох місцях неправильні закінчення або пропущено слова, наприклад повинно бути с.3₁₆ “вивчали М.М.Шеремета та учні”, с.6⁴ “отримані в [41, 42]”, с.18₆ “отримали їх оцінки”, с.18₁₁ “на дійсній осі і можна”, с.19⁷ “інтегралом Лапласа, і у випадку”, с.23₁₁ “абсцисою збіжності подібній задачі”, с.29¹⁰ “функцією”, с.29¹¹ “зводиться”, с.33₉ “результати”, с.68⁵ “функцією P ”, с.71⁹ “Для яких функцій ... і підпорядкованих їм функцій ...”, с.124⁶ “знайдено”, с.124₆ “за умови”;
- пропущено у багатьох місцях дужки, див. с.4₁₂, 17₈, 24³, 27⁴, 32₅, 39_{4,10}, 48₂, 51_{4,5}, 60_{1,6,7}, 62^{6,8}, 105¹, 116⁶;
- с.27₂ та 28₁₀ і 29² замість $(T + \varepsilon)$ та $(\tau + \varepsilon)$ повинно бути $(T - \varepsilon)$ та $(\tau - \varepsilon)$ відповідно;
- с.28_{1,10,12} та 29² замість $\ln a_n$ має бути $\ln |a_n|$;
- с.28₈ правильно $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o(\lambda_{n_{k+1}}^q)$;
- с.29₃, 30₈ та 31⁶ повинно бути “ $(1 + o(1))\tau\Phi_2(\sigma)$ ”;
- с.36₁ замість функції F має бути функція Ψ ;
- с.53₆ замість умови (2.4) повинна бути умова (1.4);
- с.56₁₀ у виразі $Tr\sigma^p$ має бути $Tr\sigma^{p-1}$;
- с.64² замість функції $P'(\sigma)$ повинна бути функція $\Phi'(\sigma)$;
- с.70₆ у формулі (2.5) повинно бути $\xi_n = \frac{\Phi_2(\varphi_1(t_{n+1})) - \Phi_2(\varphi_1(t_n))}{t_{n+1} - t_n}$;
- с.105^{3,4} та 106₂ в границі замість $r \rightarrow +\infty$ повинно бути $\sigma \rightarrow +\infty$;
- у третьому розділі нумерація тверджень починається з 3.10 замість 3.1, відповідно твердження 3.11 і 3.12 мали б бути твердженнями 3.2 і 3.3;
- формулювання деяких теорем занадто громіздкі, варто було певні умови позначити або ввести допоміжні класи.

Вказані зауваження та недоліки не є суттєвими та жодним чином не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

Висновки. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер та можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії функцій.

Робота виконана на високому науковому рівні і є завершеним науковим дослідженням, виконаним на актуальну тематику, містить нові науково обґрунтовані результати, що викладені в роботі з повним доведенням, багато з них мають форму критеріїв.

Основні результати дисертації М. С. Добушовського опубліковано у 5 (з них 1 - одноосібно) статтях у фахових виданнях із переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України, зокрема 3 у наукових фахових виданнях, які включено до міжнародної наукометричної бази даних SCOPUS і 7 тезах конференцій різного рівня. Результати дисертації пройшли апробацію на спеціалізованих наукових семінарах та міжнародних конференціях.

Оформлення дисертації відповідає вимогам щодо кандидатських дисертацій. Автореферат в цілому адекватно передає основні положення і зміст дисертаційної роботи.

Вважаю, що дисертаційна робота М. С. Добушовського "Асимптотичні властивості інтеграла Лапласа-Стільтьєса", подана на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук, задовольняє усім вимогам "Порядку присудження наукових ступенів", а її автор, **Добушовський Маркіян Степанович**, заслуговує присудження йому наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01. — математичний аналіз.

Офіційний опонент

доцент, кандидат фізико-математичних наук,

доцент кафедри вищої математики

Національного університету

"Львівська політехніка"



Т.М. Сало

Підпис засвідчує

вчений секретар

Національного університету

"Львівська політехніка"



Р.Б. Брилинський