НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМІСІЇ НТШ, ПРИСВЯЧЕНА 200-ЛІТТЮ ВІД НАРОДЖЕННЯ Т. ШЕВЧЕНКА

Ревенко В.П.

ВИСОКОТОЧНА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ І ЇХ ПОХІДНИХ НЕОРТОГОНАЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ ФУНКЦІЙ

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, м. Львів, *victorrev@ukr.net*

На основі використання узагальненої квадратичної форми, що задає найменше відхилення в усіх точках відрізка $[a,b]$ між заданою функцією і запропонованою скінченною сумою ряду за функціями з розширеним діапазоном ортогональності, запропоновано новий ефективний і високоточний алгоритм апроксимації неперервних функцій.

1. Апроксимація функцій. Апроксимуємо функцію $f(x)\in L_2[a,b]$ повною на проміжку $[a,\, b]$ системою функцій

$$\{\varphi_k(x)\}, \tag{1}$$

де $\varphi_k(x)$ − неперервні функції, які не є ортогональними на проміжку $[a,\, b]$.

Запишемо подання

$$f(x)\approx \phi_N(x)=\sum_{k=0}^{N} c_k\varphi_k(x), \tag{2}$$

де c_k − невідомі коефіцієнти, $\phi_N(x)$ − апроксимуюча функція. Для оцінки похибки апроксимації (2), пов’язаної з вибором скінченного значення $N+1$ невідомих коефіцієнтів, запишемо нев’язки:

$$\Big|\sum_{k=0}^{N} c_k\varphi_k(x)-f(x)\Big|,\ x\in[a,b]. \tag{3}$$

Розроблено ефективну аналітично-числову методику, яка дозволяє одночасно мінімізувати нев’язки (3) у всіх точках проміжку $x\in[a,b]$, і звести пошук невідомих коефіцієнтів c_k до знаходження мінімуму узагальненої квадратичної форми

$$\begin{aligned}\Psi_N\{c_0,\ldots c_N\}&=\left\|\sum_{k=0}^{N} c_k\varphi_k(x)-f(x)\right\|^2=\int_a^b\{\sum_{k=0}^{N} c_k\varphi_k(x)-f(x)\}^2dx=\\ &=\sum_{k,j=0}^{N} c_kc_jW_{kj}-2\sum_{k=0}^{N} c_kV_k+P^2,\end{aligned} \tag{4}$$

де

$$\|f(x)\|=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\ \text{− норма в } L_2[a,b];\ W_{kj}=\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_j(x)dx,\ W_{kj}=W_{jk}$$

$$V_k=\int_a^b\varphi_k(x)f(x)dx,\quad k,j=\overline{0,N};\ P^2=\int_a^b f(x)f(x)dx.$$

Вираз

$$\Psi_N\{c_0,\ldots c_N\}=\sum_{k,j=0}^{N} c_kc_jW_{kj}-2\sum_{k=0}^{N} c_kV_k+P^2$$

назвемо узагальненою квадратичною формою, яка, за означенням, є невід'ємною. Мінімум форми (4) позначимо $F(N)$.

Відзначимо, що за використання ортогональної системи функцій $\{\varphi_k(x)\}$ із умови мінімуму квадратичної форми (4) випливає відомий метод Фур’є – розкладу за ортогональними функціями.

Для знаходження мінімуму прирівняємо частинні похідні $\dfrac{\partial \Psi_N}{\partial c_j}$, $j=\overline{0,N}$, до нуля та одержимо

$$\sum_{k=0}^{N} c_k^N W_{jk} = V_j, \quad j=\overline{0,N}. \tag{5}$$

Розв’яжемо систему рівнянь (5) і знайдемо невідомі коефіцієнти c_k^N. Невідомі c_k^N можна також знайти, використавши числові методи пошуку мінімуму квадратичної форми (4). Коефіцієнти c_k^N, які відповідають мінімуму квадратичної форми (4) будуть визначати за формулою (2) найкращий наближений розклад $\phi_N(x)$.

Лема. *Функція* $F(N)$ *є невід’ємною, не зростаючою і дорівнює*

$$F(N) = P^2 - \sum_{k=0}^{N} c_k^N V_k. \tag{6}$$

Із формули (6) випливає нерівність

$$P^2 \ge \sum_{k=0}^{N} c_k^N V_k,$$

яка є узагальненям відомої нерівності Парсеваля при розкладі за неортогональними функціями.

Теорема 1. *Якщо функція* $f(x)$ *інтегровна і для любого* $\varepsilon > 0$ *існує* N*, таке що* $F(N) < \varepsilon^2/4$*, то* $f(x) = \lim\limits_{N\to\infty} \phi_N(x)$ *за нормою* $L_2[a,b]$.

Отже, проведення відповідних числових обчислень може замінити громіздкі математичні дослідження повноти вибраної системи функцій.

Розглянемо систему функцій синусів і косинусів з розширеним діапазоном ортогональності, які є ортогональними на значно більшому за $[a,\, b]$ проміжку:

$$\varphi_0(x) \equiv 1;\ \varphi_{2j}(x) = \cos(j\omega x),\ \varphi_{2j-1}(x) = \sin(j\omega x),\ j=\overline{1,N}, \tag{7}$$

де $\omega = 2\pi/(B-A)$, $[a,\, b] \subset [A,B]$, $[a,b] \ne [A,B]$. Проміжок $[A,B]$ на якому система функцій (1) є ортогональною вибирається суттєво більшим від проміжку $[a,b]$, $B - A = 3(b-a) + d$, $d > 0$. Система функцій (7) на проміжку $[a,b]$ буде повною, але неортогональною.

Теорема 2. *Якщо використовувати неортогональну систему (7) для апроксимації неперервної функції, то* $f(x) = \lim\limits_{N\to\infty} \phi_N(x)$ *за нормою* $C[a,b]$.

Як тестовий приклад, порівняємо (рис. 1) скінченні розклади неперервної на проміжку $x \in [-1,1]$ функції $y = x$: за ортогональними синусами і косинусами та – з розширеним діапазоном ортогональності.

Максимальне відхилення від $f(x)$ позначимо δ, а максимальне значення наближеного подання y_m. Крива 3 − розклад за ортогональними на проміжку $x \in [-1,1]$ $\sin k\pi x$, $N = 60$, $\delta = 1$, максимальне значення наближеного подання $y_m = 1{,}161$. Крива 4 − розклад за ортогональними синусами $N = 300$, $\delta = 1$, максимальне значення $y_m = 1{,}056$. Крива 1 − точне значення функції $y = x$, крива 2 − розклад за неортогональними синусами, кількість членів $N = 6$, максимальне відхилення від точного розв'язку δ менше ніж $3 * 10^{-5}$. Візуально точний і наближений розв'язок на рис. 1 зливаються на всьому проміжку $x \in [-1{,}1]$. Як бачимо, збіжність розкладу за ортогональними функціями є дуже поганою, так що навіть 300 членів ряду погано апроксимує лінійну функцію.

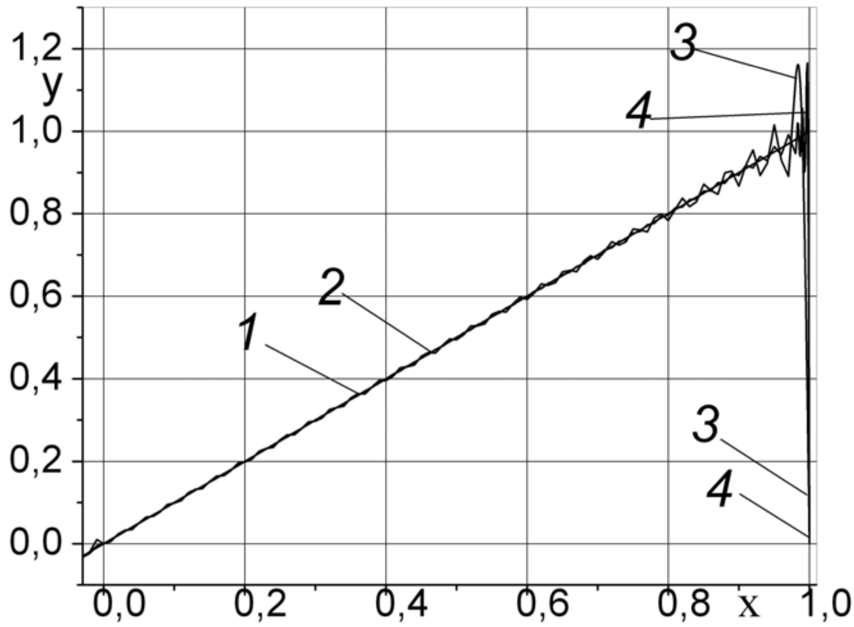

Рис. 1

Відзначимо, що на краю проміжку апроксимації навіть близька до нескінченності кількість *ортогональних* функцій не дасть такої точності, як при використанні всього-на-всього 6-ти *неортогональних функцій.*

Важливим є то, що апроксимація неперервної неперіодичної на проміжку $x \in [a, b]$ функції за ортогональними синусами і косинусами може бути збіжною тільки в $L_2[a, b]$, тоді як апроксимація *неортогональниими функціями з розширеним діапазоном ортогональності може бути збіжною в* $C^k[a, b]$.

Наслідок. *Коли використовуємо розклад у ряд неперервної неперіодичної на проміжку* $x \in [a, b]$ *функції за ортогональними синусами і косинусами, то її ряд вже буде мати розриви другого роду в крайніх точках проміжку* $[a, b]$*, а його похідна в цих точках буде прямувати до нескінчености.*

Одночасна апроксимація функції і її похідних. Для $f(x) \in C^1[a, b]$, розв'язок цієї задачі буде знаходитись із мінімуму такого функціоналу

$$\Psi_N = \int_a^b \{\{\sum_{k=0}^{N} c_k \varphi_k(x) - f(x)\}^2 + \{\sum_{k=0}^{N} c_k \varphi'_k(x) - f'(x)\}^2\} dx = \\ = \sum_{k,j=0}^{N} c_k c_j W_{kj} - 2\sum_{k=0}^{N} c_k V_k + P^2. \quad (8)$$

Якщо $f(x) \in C^m[a, b]$, то

$$\Psi_N = \int_a^b \{\sum_{i=0}^{m} \{\sum_{k=0}^{N} c_k \varphi_k^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)\}^2\} dx =$$
$$= \sum_{k,j=0}^{N} c_k c_j W_{kj} - 2\sum_{k=0}^{N} c_k V_k + P^2.$$

Висновки. Встановлено: використання функцій з розширеним діапазоном ортогональності дає більше ніж в 10^4 разів вищу точність, чим при використанні такої ж кількості ортогональних функцій; апроксимація ортогональними функціями може бути збіжною тільки в $L_2[a,b]$, тоді як апроксимація функціями з розширеним діапазоном ортогональності може бути збіжною в $C^k[a,b]$; розклад у ряд неперервної неперіодичної на проміжку $x \in [a,b]$ функції за ортогональними синусами і косинусами, не дорівнює цій функції за нормою $C[a,b]$.