Про неперервні відносно змінного репера функції

Маслюченко В.К.

28 березня 2014 р.

1. Теорема Трохимчука

Означення 1

Змінний репер у просторі $\mathbb{R}^n$ – це відображення $e : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{S}^{n-1})^n$, яке ставить у відповідність кожній точці p з $\mathbb{R}^n$ набір $e(p) = (e_1(p), ..., e_n(p))$ з n лінійно незалежних векторів з $\mathbb{R}^n$ одиничної довжини, тобто елементів сфери

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}.$$

1. Трохимчук Ю.Ю. О производных по направлению функций многих направлений // Укр. мат. журн. – 1965. – 17, №6. – С.67-79.

Теорема 1. (Ю.Трохимчук)

Нехай e – змінний репер у просторі $\mathbb{R}^n$ і $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, для якої всі похідні $D_{e_k(p)}f(p)$ у напрямках $e_k(p)$ дорівнюють нулю для кожного p з $\mathbb{R}^n$. Тоді f – стала функція.

2. Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. Нарізно неперервні функції відносно змінного репера // Укр. мат. журн. – 2004. – 56, №9. – С.1281–1286.

e – змінний репер в $\mathbb{R}^2$.
$C_e = C_{e_1,e_2}$ – сукупність функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, які нарізно неперервні в кожній точці $p \in \mathbb{R}^2$ відносно двох лінійно незалежних напрямків $e_1(p)$ і $e_2(p)$ змінного репера $e(p) = (e_1(p), e_2(p))$.

$C(f)$ – множина точок неперервності відображення f.
$D(f)$ – множина точок розриву відображення f.

Теорема 2.

Нехай $f \in C_e$. Тоді $C(f)$ – скрізь щільна G_δ-множина, а $D(f)$ – F_σ-множина першої категорії в $\mathbb{R}^2$.

$C_{e_1}D_{e_2}$ – сукупність функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, які в кожній точці $p \in \mathbb{R}^2$ неперервні в напрямку $e_1(p)$ і диференційовні в напрямку $e_2(p)$.

Теорема 3.

Нехай $f \in C_{e_1}D_{e_2}$. Тоді $D(f)$ – ніде не щільна F_σ-множина в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 4.

Існує функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ така, що:

1. f – нескінченно диференційовна в кожній точці множини $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$;
2. $f(p) = 0$ для кожної точки $p \in \mathbb{R} \times \{0\}$;
3. для кожної точки $p \in \mathbb{R} \times \{0\}$ існує такий вектор $e_2(p) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0), (-1,0)\}$, що $f(p + te_2(p)) = 0$ для кожного $t \in \mathbb{R}$;
4. $D(f) = \mathbb{R} \times \{0\}$.

5. Проблеми

Відображення $f : X \to Y$ – точково розривне $\equiv \overline{C(f)} = X$.

Відображення $f : X \to Y$ – квазінеперервне в точці $x_0 \in X \equiv (\forall V$ – околу т. $y_0 = f(x_0)$ в $Y)$ $(\forall U$ – околу т. x_0 в $X)$ $(\exists G$ – відкрита непорожня множина в $X) \mid (G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V)$.

Якщо X – берівський, Y – метризовний і $f : X \to Y$ – квазінеперервне відображення, то f – точково розривне.

Нехай e – змінний репер в $\mathbb{R}^n$ і C_e – сукупність усіх функцій з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, які нарізно неперервні у кожній точці p з $\mathbb{R}^n$ у кожному з напрямків $e_k(p)$.

Проблема 1.

Нехай $n \geqslant 3$ і $f \in C_e$. Чи буде f точково розривною функцією?

Проблема 2.

Нехай $n \geqslant 2$ і $f \in C_e$. Чи буде f квазінеперервною функцією?

Теорема 5. (В. Маслюченко, І. Мацейків, 2014)

Нехай $e_2(p) = (0, 1)$ і $e_1(p)$ – довільний вектор з $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$, $e(p) = (e_1(p), e_2(p))$ для кожного $p \in \mathbb{R}^2$ і $f \in C_e$. Тоді f – квазінеперервна функція.

7. Неперервність функцій $f \in C_e$ при $n = 3$ для спеціального репера

Теорема 6. (В. Маслюченко, І. Мацейків, 2014)

Нехай $e_2(p) = e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3(p) = e_3 = (0, 0, 1)$, $e_1(p)$ – довільний вектор з $\mathbb{S}^2$, який ортогональний до e_3 і $\neq \pm e_2$, для кожного $p \in \mathbb{R}^3$ а $e(p) = (e_1(p), e_2, e_3)$. Тоді у кожної функції $f \in C_e$ множина $C(f)$ скрізь щільна в $\mathbb{R}^3$ і типу G_δ, а $D(f)$ – це F_σ-множина першої категорії в $\mathbb{R}^3$, зокрема, f – точково розривне.

Дякую за увагу!