Асимптотичні властивості та розподіл нулів випадкових аналітичних функцій

А. Куриляк, О. Скасків

2014

У 2005 М. Содін і Б. Цірелсон розглянули випадкові цілі функції вигляду

$$\psi(z,\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}\xi_k(\omega)\frac{z^k}{\sqrt{k!}}, \tag{1}$$

де $\{\xi_k(\omega)\}$ — незалежні випадкові величини з щільністю

$$p_{\xi_k}(z)=\frac{1}{\pi}e^{-|z|^2},\ z\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{Z}_+.$$

Надалі будемо позначати такий розподіл $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$.
Позначимо через $n_\psi(r,\omega)$ кількість нулів випадкової функції $\psi(z,\omega)$ в $r\mathbb{D}=\{z\colon |z|<r\}$. Тоді для кожного $\delta\in(0,1/4]$ і всіх $r\geq 1$ маємо

$$P\left\{\omega\colon \left|\frac{n(r,\omega)}{r^2}-1\right|\geq\delta\right\}\leq \exp(-c(\delta)r^4),$$

де $c(\delta)$ залежить тільки від δ.

Також було досліджено ймовірність відсутності нулів функції $\psi(z,\omega)$ в крузі $r\mathbb{D}$

$$P_0(r) = P\{\omega\colon \psi(z,\omega) \neq 0 \text{ в } r\mathbb{D}\}.$$

Існують сталі $c_1, c_2 > 0$ такі, що

$$\exp(-c_1 r^4) \leq P_0(r) \leq \exp(-c_2 r^4).$$

Виникає питання: чи існує границя $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{\ln^- P_0(r)}{r^4}$?

А. Нішрі у 2009 році довів, що

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln^- P_0(r)}{r^4} = \frac{3e^2}{4}.$$

Також було показано, що якщо всі $\xi_n(\omega)$ до компакта $K \subset \mathbb{C}$ і $0 \notin K$, то існує $r_0(K) < +\infty$ таке, що $\psi(z,\omega)$ має нуль в $r_0\mathbb{D}$.

Ф. Назаров, М. Содін, А. Вольберг у 2008 році довели наступне співвідношення

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln\left(\frac{1}{P\{\omega\colon |n_\psi(r,\omega)-r^2|>r^\alpha\}}\right)}{\ln r}=\begin{cases}2\alpha-1, & \frac{1}{2}\le\alpha\le 1;\\ 3\alpha-2, & 1\le\alpha\le 2;\\ 2\alpha, & \alpha\ge 2.\end{cases}$$

У 2006 році М. Крішнапур розглянув таку задачу. Для функцій вигляду (1) було зафіксовано r і досліджено асимптотичні властивості $P\{\omega\colon n_\psi(r,\omega)\ge m\}$ при $m\to+\infty$. Для кожного $r>0$

$$\ln P\{\omega\colon n_\psi(r,\omega)\ge m\}=-\frac{1}{2}m^2\ln m(1+o(1)),\ \ m\to+\infty.$$

А. Нішрі у 2013 році розглянув цілі гаусові функції вигляду

$$f(z,\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}\xi_k(\omega)a_nz^n,$$

де $a_0\neq 0$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=0$. Якщо $\varepsilon>0$, тоді існує множина скінченної логарифмічної міри $E\subset(1,+\infty)$ ($\int_E\frac{dr}{r}<+\infty$) така, що для всіх $r\in(1,+\infty)\backslash E$ маємо

$$s(r)-s^{1/2+\varepsilon}(r)\le p_0(r)\le s(r)+s^{1/2+\varepsilon}(r),\ s(r)=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln^+(a_nr^n). \tag{2}$$

Доведено, що винятков множина в цьому твердженні є істотною. А саме, побудовано цілу гаусову функцію і множину E нескінченної міри Лебега таку, що $p_0(r)\ge 2s(r)-c\sqrt{s(r)}, r\in E$. Також було сформульоване наступне запитання. *Чи можна замінити степінь* $1/2$ *у співвідношенні (2) меншим?*

Ю. Перез, Б. Віраг у 2005 році розглянули випадкову аналітичну функцію вигляду

$$f_1(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k(\omega) z^k, \tag{3}$$

де $\xi_k(\omega) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Для цієї функції було доведено такий результат.
Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини $n_{f_1}(r,\omega)$ (кількість нулів функції $f_1(z,\omega)$ в $r\mathbb{D}$)

$$M(n_{f_1}(r,\omega)) = \frac{r^2}{1-r^2},\ D(n_{f_1}(r,\omega)) = \frac{r^2}{1-r^4},$$
$$p_0(r) = \frac{\pi^2 + o(1)}{1-r},\ r \to 1-0.$$

Як зазначив, М. Содін у 2008 році не були відомі аналоги цього твердження для випадкових аналітичних функцій вигляду (1) довільною послідовністю $a_n > 0$ такою, що $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1.$

О. Скасків і А. Куриляк(2011, Математичний вісник НТШ) розглянули аналітичні випадкові функції вигляду

$$f(z,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) a_n z^n,$$

де $a_n > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,\ \{a_n\}$ — логарифмічно ввігнута і

$$\lim_{r\to1-0}(1-r)\ln\ln\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n\right) = +\infty.$$

Послідовність (a_n) будемо називати *логарифмічно ввігнутою*, якщо існує функція $a(t) \in C^2(0, +\infty)$ така, що $a(n) = a_n$ і функція $\ln a(t)$ — ввігнута.

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E(\varepsilon, f) = E_1 \subset (0, 1)$ нульової щільності, тобто

$$DE_1 = \overline{\lim_{r \to 1-0}} \frac{1}{1-r} \mathrm{meas}(E_1 \cap [r, 1)) = 0,$$

що для всіх $r \in (0, 1) \setminus E_1$ маємо

$$s(r) - s^{9/10}(r) \ln^{18/5+\varepsilon} s(r) \leq p_0(r) \leq s(r) + \sqrt{s(r)} \ln^{3+\varepsilon} s(r).$$

Позначимо через H клас додатних зростаючих неперервних функцій на $(0,1)$ таких, що

$$\int_{r_0}^{1} h(r)dr = +\infty, \ r_0 \in (0,1).$$

$$h\text{-meas } (E) \stackrel{def}{=} \int_E h(r)dr,$$

де $h \in H$. Очевидно, що h-meas$((0,1)) = +\infty$.
Нехай f — аналітична функція в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n. \tag{4}$$

Позначимо для $r \in (0,1)$ максимум модуля функції f $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$, максимальний член ряду (4)

$$\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n\colon n \geq 0\},$$
$$\Delta_h(r,f) = \frac{\ln M_f(r) - \ln \mu_f(r)}{2\ln h(r) + \ln_2\{h(r)\mu_f(r)\}},$$

де $\ln_2 x \stackrel{def}{=} \ln(\ln x)$. Т. Кевари у 1966 році довів, що для всіх аналітичних функцій f в $\mathbb{D}$ вигляду (4) існує множина $E \subset (0,1)$ скінченної логарифмічної міри($h\text{-meas}(E) < +\infty$ при $h(r) = (1-r)^{-1}$) така, що

$$\varlimsup_{\substack{r\to 1-0\\ r\notin E}} \Delta_h(r,f) \leq \frac{1}{2}. \tag{5}$$

У 1980 році Н.В. Сулейманов довів, що стала $1/2$ у нерівності (5) у загальному не може бути замінена меншим числом. Вибравши $g(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\{\sqrt{n}\}z^n$ і $h(r)=(1-r)^{-1}$ отримаємо

$$\varlimsup_{r\to 1-0}\frac{M_g(r)}{h(r)\mu_g(r)\ln^{1/2}\{\mu_g(r)h(r)\}}\geq C>0.$$

У зв'язку з цим виникає природне питання: *як описати "кількість" тих аналітичних функцій, для яких нерівність (5) може бути уточнена?*

Розглянемо аналітичні функції вигляду

$$f_t(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{i\theta_n t}z^n, \tag{6}$$

де $(\theta_n)_{n\geq 0}$ — деяка послідовність натуральних чисел.

Припустимо, що послідовність $(\theta_n)_{n\geq 0}$ задовольняє нерівність

$$\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} \geq q > 1 \ (n \geq 0). \tag{7}$$

Зауважимо, що можливість уточнення нерівності типу Вімана-Валірона для цілих функцій вигляду (6) була раніше розглянута М. Стілом(1987) і П. Філевичем(1996).

Зауважимо, що нерівність (5) виконується для всіх $h \in H$.

Теорема 1. *Нехай* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *з радіусом збіжності* $R(f) = 1$. *Якщо* $h \in H$, *то для кожного* $\delta > 0$ *існує множина* $E(\delta, f, h) = E \subset (0,1)$ *скінченної* h*-міри така, що для всіх* $r \in (0,1)\backslash E$ *маємо*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r)h(r)\ln^{1/2}\{h(r)\mu_f(r)\}\ln^{1/2+\delta} h(r)\ln_2^{1+\delta}\{h(r)\mu_f(r)\}.$$

Отже,

$$\overline{\lim_{\substack{r\to 1-0\\ r\notin E}}}\Delta_h(r, f_t) = \overline{\lim_{\substack{r\to 1-0\\ r\notin E}}}\frac{\ln M_f(r,t) - \ln \mu_f(r)}{2\ln h(r) + \ln_2\{h(r)\mu_f(r)\}} \leq \frac{1}{2}. \qquad (8)$$

Термін “майже напевно” використовується в сенсі, що відповідна властивість виконується майже скрізь відносно міри Лебега на дійсній прямій.

Теорема 2. *Якщо* $f(z,t)$ *— аналітична функція вигляду (6) і послідовність* $(\theta_n)_{n\geq 0}$ *задовольняє умову (7), тоді для кожного* $\delta > 0$ *майже напевно за* t *існує множина* $E(\delta,t) \subset (0,1)$ *така, що* $h\text{-}meas(E(\delta,t)) < +\infty$ *і* $M_f(r,t) = M_{f_t}(r) = \max_{|z|\leq r} |f_t(z)|$ *задовольняє нерівність*

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)\sqrt{h(r)}\ln^{1/4}\{h(r)\mu_f(r)\}\times \\ \times \ln^{3/4+\delta} h(r) \ln_2^{1+\delta}\{h(r)\mu_f(r)\}$$

для $r \in (0,1)\backslash E(\delta,t)$. Отже,

$$\varlimsup_{\substack{r\to 1-0 \\ r\notin E}} \Delta_h(r,f_t) \leq \frac{1}{4}. \tag{9}$$

Через $\mathcal{L}$ ми позначимо клас зростаючих до $+\infty$ функцій $l(x)$ на $[0, +\infty)$. Нехай

$$\gamma(l) = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln l(x)}{\ln x}.$$

Розглянемо клас аналітичних функцій вигляду (6), для яких послідовність $(\theta_n)_{n\geq 0}$ задовольняє умову

$$\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} \geq 1 + \frac{1}{\varphi(n)}, \ \varphi \in \mathcal{L}. \tag{10}$$

Яку сталу замість $1/2$ *ми можемо поставити у нерівності (5) для цього класу аналітичних функцій? За яких умов на* $\varphi(x)$ *правильна нерівність (9)?*

Спочатку зауважимо, що для того щоб отримати точнішу нерівність ніж (5) функція $\varphi(x)$ не повинна швидко зростати. Справді, якщо $\varphi(x) = x$, то можемо вибрати $\theta_n = n$, $h(r) = (1-r)^{-1}$ і $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\sqrt{n}} z^n$. Тоді для всіх t одержимо

$$M_g(r,t) = \max\{|g(r,t)| : |z| \le r\} = \max_{0\le\psi\le 2\pi} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} e^{in\psi} \right| =$$

$$= \max_{0\le\psi\le 2\pi} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in(t+\psi)} \right| = \max_{0\le\psi\le 2\pi} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\psi} \right| =$$

$$= M_g(r) \ge C_1 \mu_g(r) h(r) \ln^{1/2}\{\mu_g(r) h(r)\},$$

при $r \to 1-0$ і $t \in \mathbb{R}$. Отже, щоб уточнити нерівність (5) функція $\varphi(x)$ повинна задовольняти умову $\gamma(\varphi) < 1$.

Теорема 3. *Нехай* $f_t(z)$ *аналітична функція вигляду (6),* $h \in H$, *послідовність* $(\theta_n)_{n\geq 0}$ *задовольняє умову (10), де* $\varphi \in \mathcal{L}$ *і* $\ln\varphi(x) = O(\ln_2 x)$, $x \to +\infty$. *Тоді існує множина* $E(\delta, t) \subset (0,1)$ *така, що* h-$meas(E(\delta, t)) < +\infty$ *і маже напевно за* $t \in \mathbb{R}$ *отримаємо*

$$\varlimsup_{\substack{r\to 1-0\\ r\notin E}} \Delta_h(r, f_t) \leq \frac{1}{4}.$$

Теорема 4. *Нехай* $f_t(z)$ *аналітична функція вигляду (6),* $h \in H$, *послідовність* $(\theta_n)_{n\geq 0}$ *задовольняє умову (10), де* $\varphi \in \mathcal{L}$ *і*

$$\gamma(\varphi) = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \ln \frac{\theta_n}{\theta_{n+1} - \theta_n} \leq \delta \in [0, 1/2). \qquad (11)$$

Тоді для аналітичної функції f_t *існує множина* $E(\delta, t) \subset (0,1)$ *така, що* h-$meas(E(\delta, t)) < +\infty$ *і майже напевно за* $t \in \mathbb{R}$ *маємо*

$$\varlimsup_{\substack{r\to 1-0\\ r\notin E}} \Delta_h(r, f_t) \leq \frac{1+3\delta}{4+2\delta}.$$

Отже ми уточнили нерівність (5) для всіх аналітичних функцій вигляду (6) і всіх $h \in H$, коли $\gamma(\varphi) < 1/2$. Як було зауважено вище, цю нерівність не можна уточнити, коли $\gamma(\varphi) \geq 1$. Чи можна уточнити нерівність (5) для всіх аналітичних функцій вигляду (6) за виконання умови $\gamma(\varphi) < 1$?

Теорема 5. *Нехай $f_t(z)$ аналітична функція вигляду (6), $h \in H$: $\ln_2 \mu_f(r) = o(\ln h(r))$, $r \to 1-0$, послідовність $(\theta_n)_{n\geq 0}$ задовольняє умову (10), де $\varphi \in \mathcal{L}$ і*

$$\gamma(\varphi) = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{\ln n} \ln \frac{\theta_n}{\theta_{n+1} - \theta_n} \leq \delta \in [0, 1). \tag{12}$$

Тоді для f_t існує множина $E(\delta, t) \subset (0, 1)$ така, що h-$meas(E(\delta, t)) < +\infty$ і майже напевно для $t \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim_{\substack{r\to 1-0 \\ r\notin E}}} \Delta_h(r, f_t) \leq \frac{1+2\delta}{4+2\delta}.$$

Нехай $h \in H$ і $\theta = (\theta_n)_{n \geq 0}$ — деяка послідовність, яка задовольняє умову (7) така, що $\gamma(\varphi) \leq \delta$. Розглянемо такі множини

$$F_{1h}(f, \theta, E) = \left\{ t \in \mathbb{R} \colon \ \varlimsup_{\substack{r \to 1-0 \\ r \notin E}} \Delta_h(r, f_t) \leq \frac{1 + 3\delta}{4 + 2\delta} \right\},$$

$$F_{2h}(f, \theta) = \left\{ t \in \mathbb{R} \colon \ \varliminf_{r \to 1-0} \Delta_h(r, f_t) \leq \frac{1 + 3\delta}{4 + 2\delta} \right\}.$$

За теоремою 4 можна зробити висновок, що для кожної аналітичної функції в $\mathbb{D}$ існує множина $E(f)$ скінченної h-міри така, що $F_{1h}(f, \theta)$ є "великою" в сенсі міри Лебега. Тоді те саме можна сказати про множину $F_{2h}(f, \theta)$.

Природно виникає таке питання: *чи для кожної аналітичної функції f існує множина $E = E(f)$ скінченної h-міри така, що $F_{1h}(f, \theta, E)$ є залишковою в $\mathbb{R}$?*

Зауважимо що $B \subset \mathbb{R}$ є залишковою в $\mathbb{R}$, якщо її доповнення $\overline{B} = \mathbb{R} \backslash B$ є множиною першої категорії Бера в $\mathbb{R}$.

Якщо відповідь на це питання була позитивною, то множина $F_{2h}(f,\theta)$ була б залишковою в $\mathbb{R}$. Проте для деяких аналітичних функцій f і $h \in H$ множина $F_{1h}(f,\theta,E)$ є множиною першої категорії Бера.

Теорема 6. *Нехай послідовність $(\theta_n)_{n\geq 0}$ задовольняє умову (7), $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{n^{\varepsilon}} z^n$, $\varepsilon \in (0,1)$, і $h(r) = (1-r)^{-1}$. Тоді існує стала $C = C(\theta,\varepsilon) > 0$ така, що для довільної послідовності $(r_n)_{n\geq 0}$ зростаючої до 1 множина*

$$F_1 = \left\{ t \in \mathbb{R} \colon \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{M_{f_t}(r_n)}{h(r_n)\mu_f(r_n)\ln^{1/2}\{h(r_n)\mu_f(r_n)\}} \leq C \right\}$$

є множиною першої категорії Бера.

Теорема 7. *Якщо послідовність $(\theta_n)_{n\geq 0}$ задовольняє умову (11) і $h \in H$, то для кожної аналітичної функції f множина $F_{2h}(f,\theta)$ є залишковою в $\mathbb{R}$.*